

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Όνοματεπώνυμο:

Θέμα Α

A1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

- i. Πότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$;
- ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano για την f και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία.

(4 Μονάδες)

A2. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό k μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = k$

(5 Μονάδες)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές(Σ) ή Λάθος(Λ):

- i. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1 - 1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

(2 Μονάδες)

- ii. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

(3 Μονάδες)

- iii. Έστω μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ'ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και λ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \lambda) = 0$.

(3 Μονάδες)

- iv. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

(2 Μονάδες)

v. Ισχύει ότι $|ημx| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(3 Μονάδες)

vi. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = 0$ τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

vii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο χ_0 , και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο χ_0 τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο χ_0 .

viii. Αν η f είναι συνεχής

(2 Μονάδες)

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} \quad g(x) = \sqrt{x}-1$$

B1) Να αποδείξετε ότι $f = g$.

(8 Μονάδες)

B2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

(8 Μονάδες)

B3) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

B4) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = f(g(x)) + g(f^{-1}(x))$.

(9 Μονάδες)

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = 2e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$.

(6 Μονάδες)

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

(7 Μονάδες)

iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(7 Μονάδες)

iv. Να λύσετε την ανίσωση $\ln f(x) > 0$

(5 Μονάδες)

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - k, & x < 0 \\ x^3 + x + k - 2, & x \geq 0 \end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι $k = 1$.

(3 Μονάδες)

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(5 Μονάδες)

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

(6 Μονάδες)

iv. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

ο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 10\eta\mu\chi)$

ο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\eta\mu\chi}$

(6 Μονάδες)

ν. Αν χ_1 είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ τότε να αποδείξετε ότι :

$f(f(x)) > -1$ για κάθε $\chi > \chi_1$.

(5 Μονάδες)

