

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Όνοματεπώνυμο:

Θέμα Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

(5 Μονάδες)

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέγεται συνεχής ;

(5 Μονάδες)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές(Σ) ή Λάθος(Λ):

i. Αν μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

(2 Μονάδες)

ii. Αν $A = (\alpha, \beta), x_0 \in A$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, τότε η f έχει ελάχιστη τιμή το $f(x_0)$.

(3 Μονάδες)

iii. Έστω μια f με πεδίο ορισμού το A και $x_2 \in A$. Αν $f(x) \geq f(x_2)$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_2 , τότε το $f(x_2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

(2 Μονάδες)

iv. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι γνησίως αύξουσα.

(2 Μονάδες)

v. Σε μια συνάρτηση, ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

(2 Μονάδες)

- vi. Το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην καμπύλη της f , όταν $f(\alpha) = \beta$.
(2 Μονάδες)
- vii. Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f .
(2 Μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
(5 Μονάδες)
- ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x-1)f(x)]$.
(5 Μονάδες)
- iii. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.
(5 Μονάδες)
- iv. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
(5 Μονάδες)

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{x+1}-1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε την τιμή του α , για της οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3, 6)$.

(Μονάδες 7)

Για $\alpha = 0$:

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(Μονάδες 7)

iv. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$ και διέρχεται από το σημείο $M(-1, f(-1))$.

(Μονάδες 7)

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} για την οποία:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - (2+\alpha)x + 2\alpha}{x-2}, & \text{αν } x \neq 2 \\ \alpha, & \text{αν } x = 2 \end{cases}$$

Αν επιπλέον $\beta = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ τότε :

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι $\beta = 3$.

(Μονάδες 7)

Έστω $g(x) = x^\beta + x^\alpha + 2022$

iii. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 7)

iv. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $g(f(\alpha))$, $g(f(\beta))$.

(Μονάδες 4)

