

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Όνοματεπώνυμο:

Θέμα Α

A1. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

(5 Μονάδες)

A2. Έστω f , g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A , B αντιστοίχως. Ποιό σύνολο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης όπου είναι η σύνθεση της f με την g .

(5 Μονάδες)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές(Σ) ή Λάθος(Λ):

i. Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μια τουλάχιστον λύση ως προς x .

(2 Μονάδες)

ii. Αν f , g , h είναι τρεις διαφορετικές συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$ τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(3 Μονάδες)

iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της f .

(3 Μονάδες)

iv. Το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης είναι f είναι το σύνολο A των τεταγμένων των σημείων της C_f .

(2 Μονάδες)

v. Αν η f είναι 1-1, τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

(3 Μονάδες)

vi. Η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + 1$ είναι συνάρτηση 1-1.

(2 Μονάδες)

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+x-1$ και $g(x)=\ln x$

- i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g
(4 Μονάδες)
- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση $h=f \circ g$
(6 Μονάδες)
- iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία
(3 Μονάδες)
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $x+\ln x > 1$
(6 Μονάδες)
- v. Να λύσετε την εξίσωση $x^2-x-2=\ln \frac{x+3}{x^2+1}$
(6 Μονάδες)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

- i. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x>0$
(5 Μονάδες)
- ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
(5 Μονάδες)
- iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g:A\rightarrow\mathbb{R}$ με $A=(0,+\infty)$ για
 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
(5 Μονάδες)

iv. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(y)>f(x+y)$ για κάθε $x, y>0$

(5 Μονάδες)

v. Να λύσετε την ανίσωση :

$$(x^2+1)f(x^4+1)<(x^4+1)f(x^2+1)$$

(5 Μονάδες)

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\lambda x-1, \lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(3 Μονάδες)

Έστω ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 1$.

ii. Να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

(4 Μονάδες)

iii. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(4 Μονάδες)

iv. Χρησιμοποιώντας βασικές συναρτήσεις και κάνοντας κατάλληλο σχήμα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

(5 Μονάδες)

v. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε τις ανισώσεις:

a) $f^{-1}(x)<-1$

b) $f^{-1}(x-2+f(x))<2$

(5 Μονάδες)

vi. Να λύσετε την εξίσωση $(x^3+x-1)^3+x^3+x=-1$

(4 Μονάδες)