

Όνοματεπώνυμο:.....

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ύλη: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Επιμέλεια διαγωνίσματος:

Αξιολόγηση :

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα τότε οι γραφικές παραστάσεις των

f και f^{-1} έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$

(Μονάδες 10)

A2. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο ; Πότε η συνάρτηση

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1 στο A ;

(Μονάδες 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Μια γνήσια μονότονη συνάρτηση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο πεδίο ορισμού της .

2. Αν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in f(A)$.

3. Αν $f(0) > f(20)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα .

4. Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ τότε η σύνθεση της f με την g ορίζεται στο σύνολο $\{x \in A \mid x \in B\}$.

5. Οι συναρτήσεις $f(x) = 2\ln x$ και $g(x) = \ln x^2$ είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

B1. Να σχεδιάσετε τις συναρτήσεις $|f(x)|$ και $f(x-1)+1$.

(Μονάδες 5)

B2. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$.

(Μονάδες 6)

B3. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0,1)$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)$ αντιστρέφεται

και να βρείτε την αντίστροφη της.

(Μονάδες 7)

B4. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε την συνάρτηση $\varphi(x)$ ως προς την μονοτονία και

τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(x) = e^{x-5}$ και $g(x) = \ln x + 5$.

Γ1. Βρείτε τις συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και εξετάστε αν είναι ίσες.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 6)

Γ3. Να ορίσετε την συνάρτηση $(f + g)(x)$ και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 6)

Γ4. Να δείξετε ότι $(f + g)(e^x) < \frac{(f + g)(e^{2x}) + (f + g)(e^{3x})}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x \cdot f(1-x) - f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g(x) = \ln(4-x^2).$$

Δ1. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = -x$.

(Μονάδες 7)

Δ2. Να ορίσετε την συνάρτηση $f - g$ και να λύσετε την ανίσωση $f(x) - g(x) > -x$.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να ορίσετε την σύνθεση της g με την f , να μελετήσετε την μονοτονία της στο διάστημα $(-2, 2)$

και να δείξετε ότι $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) < f\left(g\left(\frac{2}{3}\right)\right)$.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$.

(Μονάδες 6)

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!! ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΗΝ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΧΡΟΝΟΥ!!