# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

**(** ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ **)**

ΟΝΟΜΑ : ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ :

## ΘΕΜΑ Α

**Α1 .** Έστω μία συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$ . Αν η $f$ είναι συνεχής στο $\Delta$ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του $\Delta$ ισχύει $f'(x)=0$ , να αποδείξετε ότι η $f$ είναι σταθερή σε όλο το $\Delta$ .

*( Μονάδες 7)*

**Α2 .** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής .

*( Μονάδες 4 )*

**Α3 .** Πότε μία συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ;

*( Μονάδες 4 )*

**Α4 .** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό ,** αν η πρόταση είναι σωστή , ή **Λάθος** , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**1.** Κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον λύση .

**2.** Για την $1-1$ συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$ .

**3.** Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ τότε $2+\int_0^2 f^2(x)dx \ge \int_0^2 2f(x)dx$ .

**4.** Αν για τις συναρτήσεις $f, g$ ισχύει $f'(x) = g'(3-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = g(3-x) + c$ .

**5.** Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$ , τότε $\beta = \gamma$ .

*( Μονάδες 10 )*

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)e^{1-x} + x$ , $x \in \mathbb{R}$ .

**Β1.** Να μελετήσετε την $f$ ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε , αν υπάρχουν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

*( Μονάδες 5 )*

**Β2.** Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται , να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$.

*( Μονάδες 7)*

**Β3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f(x)$ .

*( Μονάδες 5)*

**Β4.** Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f^{-1}(x)$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την γραφική παράσταση της $f^{-1}(x)$ και τις ευθείες $y = x$ και $x = e$ .

*( Μονάδες 8 )*

## ΘΕΜΑ Γ

Ας είναι μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)=\ln x^x+\alpha x-\alpha$ για την οποία ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι $f(x)=x\ln x-x+1$ , $x>0$ .

*( Μονάδες 5)*

**Γ2.** α) Να αποδείξετε ότι $\ln x<f(x+1)-f(x)<\ln(x+1)$ για κάθε $x>0$ .

*( Μονάδες 4)*

β) Αν σημείο $\mathrm{M}$ κινείται στο γράφημα της $f'(x)$ με την τετμημένη της προβολής $\mathrm{M}'$ του $\mathrm{M}$ στον $x'x$ να αυξάνεται με ρυθμό 2 μ/s , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\mathrm{OMM}'$ την στιγμή που το $\mathrm{M}$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(e,1)$ .

*( Μονάδες 4)*

**Γ3.** Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^x+\dfrac{f(x)-1}{x}$ , $x>0$ .

α) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη $g^{-1}(x)$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

*( Μονάδες 3)*

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(g(x)\eta\mu\dfrac{1}{g(x)}+\dfrac{\eta\mu g(x)}{g(x)}\right)$

*( Μονάδες 4)*

**Γ4.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{e-1}^{e^e} g^{-1}(x)dx$ .

*( Μονάδες 5)*

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται πραγματική συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $\ln\left(f'(x)\right)+f(x)-\ln\left(e^{f(x)}+1\right)=e^{f(x)}+1-f'(x)e^{f(x)}$ για κάθε $x\ge 0$
- Η $C_f$ εφάπτεται της ευθείας $y=2x$

**Δ1.** Να λυθεί η εξίσωση $x+e^x+\ln 2=\ln(e^x+1)+1$

*( Μονάδες 5 )*

**Δ2.** Να βρεθεί το $f(0)$ και να δειχθεί ότι $f(x)=\ln(2e^x-1)$ , $x\ge 0$ .

*( Μονάδες 6 )*

**Δ3.** Να γίνει μελέτη της συνάρτησης $f(x)$ ως προς μονοτονία , κυρτότητα και σύνολο τιμών .

*( Μονάδες 5 )*

**Δ4.** Αν $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$ για $x\ge 0$ και $F(1)=0$ , τότε :

α) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[F(x+1)-F(x)\right]$ *( Μονάδες 4 )*

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{F(x+1)-xF(x)}{x-2}+\dfrac{\int_0^1 2F(x)dx+f(x)}{x-1}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$ .

*( Μονάδες 5 )*

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!