ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Παράγωγος Συνάρτησης

Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε αυτό , να δείξετε ότι το σημείο x_0 είναι ρίζα της παραγώγου .

(Μονάδες 10*)*

Α2. Να δώσετε την γεωμετρική σημασία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού .

(Μονάδες 5*)*

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+f(0)=f(1)$.

β. Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_\alpha x}{\alpha^x}=-\infty$.

γ. Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(\alpha)f(\beta)\geq 0$.

δ. Αν $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα τότε για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathrm{A}$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0 \quad .$$

ε. Ισχύει $\left(2^{2^x}\right)'=2^x\left(2^x(\ln 2)^2\right)$

(Μονάδες 10*)*

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f''(x)=f(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$

$f(0)=2$ και $f'(0)=-1$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)-f'(x)-1\right)e^{x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

και στην συνέχεια να δείξετε ότι $f(x)=e^{-x}+1$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

Β2. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη της .

(Μονάδες 7)

Β3. Να αποδείξετε ότι $e^{-\alpha}(\alpha-\beta)\le e^{-\beta}-e^{-\alpha}\le e^{-\beta}(\alpha-\beta)$.

(Μονάδες 5)

Β4. Να δείξετε ότι $f(\eta\mu x)<f\left(x-\frac{1}{6}x^{3}\right)$ για κάθε $x>0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x-\ln x & , \ x\ge 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & , \ 0<x<1 \end{cases}$.

Γ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την συνέχεια και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της .

(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x)\ge 1$ για κάθε $x>0$ και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1+\alpha^{2}$ έχει ακριβώς

δύο ρίζες για κάθε $\alpha>0$.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, e^4)$ που να διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$.

(Μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-\lambda>\frac{1}{4}-\ln\lambda$ για κάθε $\lambda \geq 2$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε η παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f(x)\sqrt{x^2+1}+xf'(x)\sqrt{x^2+1}=x$ για κάθε $x \neq 0$ και $f(1)=\sqrt{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $x \neq 0$

(Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

(Μονάδες 7)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4\left(f^2(x^2)+1\right)=f^2(x^2)(x^4+1)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες .

(Μονάδες 6)

Δ4. Αφού δείξετε ότι η f αντιστρέφεται , να βρείτε την αντίστροφή της και να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν δύο τουλάχιστον κοινά σημεία .

(Μονάδες 6)