

Όνοματεπώνυμο:
Μάθημα:
Υλη:
Επιμέλεια διαγωνίσματος:
Αξιολόγηση :

ΘΕΜΑ Α

A1) α) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι ισχύει :
 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

β) Πότε ισχύει η ισότητα ; (10 μονάδες)

A2) Έστω A και B δύο μη κενά συνολά. Τι ονομάζουμε συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B ; (5 μονάδες)

A3) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(3, 2)$ ως προς: α) τον άξονα $x'x$ β) τον άξονα $y'y$ γ) την αρχή των αξόνων (6 μονάδες)

A4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος):

α) Η εξίσωση $(\lambda - 1) \cdot x = \lambda^2 - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ για $\lambda = 1$ είναι αδύνατη .

β) Δεν υπάρχουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που να τέμνουν τον άξονα $y'y$ σε δύο σημεία .

γ) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει η ισοδυναμία : $\alpha^2 + \beta^2 = 0$
 $\Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

δ) Η ευθεία με εξίσωση $x + y + 1 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 .

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύουν : $\alpha^2 + 4\alpha + 3 < 0$ και
 $\sqrt{\beta^2 - 8\beta + 16} < 1$

B1) Να αποδείξετε ότι $-3 < \alpha < -1$ (5 μονάδες)

B2) Να αποδείξετε ότι $3 < \beta < 5$ (5 μονάδες)

B3) Θεωρούμε την παράσταση

$$K = |\alpha + 3| - |\alpha + 1| + |2\beta - 10|$$

α) Να γράψετε την παράσταση K χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής .

(7 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι $K \in (-2, 6)$ (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} |x-2| + \kappa, & x \in (0, 9) \\ x^3 + 8, & x \leq 0 \end{cases}$, $\kappa \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3, -2)$.

Γ1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f καθώς και την τιμή της παραμέτρου κ . (5 μονάδες)

Για $\kappa = -3$:

Γ2) α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-\sqrt[3]{2})$, $f(0)$ και $f(1)$.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x' , y' . (6 μονάδες)

Γ3) Για $x \leq 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{f(x)}{x+2} = x^2 + 4$.

(6 μονάδες)

Γ4) Για $x \in (0, 9)$, να βρείτε το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης:

$$(f(x) + 3)^2 - 6 \cdot f(x) - 10 \geq 0$$

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 + \lambda \cdot x + \lambda^2 + 1$ και $g(x) = -x + \lambda^2 - 3$.

Δ1) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' . (5 μονάδες)

Δ2) Για $\lambda = 3$: α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης g . (7 μονάδες)

Δ3) Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν δύο κοινά σημεία (7 μονάδες)

Δ4) Για $\lambda < -5$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων f και g είναι θετικές ή αρνητικές. (6 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ: ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ

