Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Εισηγητής: Ηλίας Σπυρόπουλος
Θεματική Ενότητα: Ανάλυση.

Σεπτέμβριος 2021

Θέμα Α

Α.1 Έστω $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 στο **Α**. Δείξτε οτι οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 7

Α.2 Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
$\ll$ Κάθε συνάρτηση f που είναι $1-1$ σε ένα διάστημα **Α** είναι και γνήσια μονότονη στο **Α**. $\gg$

α΄. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β΄. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

Μονάδες 3

Α.3 Πότε μια συνάρτηση $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathbb{A}$ ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Μία γνήσια μονότονη συνάρτηση $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbf{A}$.

2. Οι συναρτήσεις $f(x) = 2\ln x$ και $g(x) = \ln x^2$ είναι ίσες.

3. Αν $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in f(\mathbf{A})$.

4. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχα και

$$f(A) \cap B \neq \emptyset.$$

   Τότε ορίζεται πάντα η σύνθεση gof.

5. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε για κάθε $y \in f(\mathbf{A})$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση ως πρός x.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(e^x) = e^x + x - 1.$$

Β.1 Δείξτε οτι $f(x) = \ln x + x - 1, x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Β.2 Δείξτε οτι η f αντιστρέφεται και βρείτε το κοινό σημείο της C_f με την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 6

Β.3 Λύστε στο $[0, 1)$ την εξίσωση:

$$f\left(e^{x^2}\right) = f\left(1 - x^2\right).$$

Μονάδες 6

Β.4 Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln\left(\frac{3x}{x^2 + 2}\right) < x^2 - 3x + 2.$$

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -\ln x, x > 0$ και $g(x) = \dfrac{x}{1+x}, x > -1.$

Γ.1 Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog.

Μονάδες 5

Γ.2 Αν $h(x) = (fog)(x) = -\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right), x > 0$ να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}.

Μονάδες 7

Γ.3 Αν $\phi(x) = h^{-1}(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}, x > 0$ δείξτε ότι η ϕ είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και ότι η εξίσωση $\phi(x) = 2020$ έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 6

Γ.4 Να λύσετε την ανίσωση

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\phi(e^x)} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\phi(1-x)} > 0$$

στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f([0, +\infty)) = (0, +\infty)$ και η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $h(0) = 0$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\ln f(x) = h^3(x) + h(x) + 1, x \geq 0.$$

Δ.1 Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα και οτι

$$f(x) + f(x^2) > f(x^3) + f(x^4)$$

για κάθε $x \in (0, 1)$.

Μονάδες 7

Δ.2 Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) + f(x^2) = f(x^3) + f(x^4)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1]$.

Μονάδες 5

Δ.3 Δείξτε ότι

$$f(e^x) \geq f\left(1 - x - \frac{x^2}{2}\right), x \geq 0.$$

Μονάδες 7

Δ.4 Δείξτε οτι η εξίσωση

$$f(e^x) + h(\sqrt{x}) = f\left(1 - x - \frac{x^2}{2}\right)$$

έχει μοναδική λύση στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 6

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείρηση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!