Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Εισηγητής Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Ανάλυση.

Αύγουστος 2021

Θέμα Α

Α.1 Έστω $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 στο **Α**. Δείξτε οτι οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 7

Α.2 Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
$\ll$ Κάθε συνάρτηση f που είναι $1-1$ σε ένα διάστημα **Α** είναι και γνήσια μονότονη στο **Α**. $\gg$

α΄. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β΄. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

Μονάδες 3

Α.3 Πότε μια συνάρτηση $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathbb{A}$ ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Αν για κάποια συνάρτηση $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbf{A}$ τότε η f είναι γνήσια μονότονη στο $\mathbf{A}$.

2. Οι συναρτήσεις $f(x) = 2\ln x$ και $g(x) = \ln x^2$ είναι ίσες.

3. Αν $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in f(\mathbf{A})$.

4. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχα και
$$f(A) \cap B \neq \emptyset.$$
Τότε ορίζεται πάντα η σύνθεση gof.

5. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε για κάθε $y \in f(\mathbf{A})$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση ως πρός x.

Μονάδες 10

Θέμα B

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x} + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται απο την αρχή των αξόνων.

B.1 Δείξτε οτι $\lambda = -1$.

Μονάδες 5

B.2 Δείξτε οτι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

B.3 Δείξτε οτι η f αντιστρέφεται και βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

B.4 Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x+1), x > -1$. Αν γνωρίζετε οτι για κάθε $x > 0, f(x) > f^{-1}(x)$ σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1}.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -\ln x, x > 0$ και $g(x) = \dfrac{x}{1+x}, x > -1$.

Γ.1 Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog.

Μονάδες 5

Γ.2 Αν $h(x) = (fog)(x) = -\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right), x > 0$ να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}.

Μονάδες 7

Γ.3 Αν $\phi(x) = h^{-1}(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}, x > 0$ δείξτε ότι η ϕ είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και ότι η εξίσωση $\phi(x) = 2021$ έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 6

Γ.4 Να λύσετε την ανίσωση

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\phi(e^x)} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\phi(1-x)} > 0$$

στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f([0, +\infty)) = (0, +\infty)$ για την οποία για κάθε $x \geq 0$ ισχύει:

$$\ln f(x) + f^3(x) + f(x) = x + 2.$$

Δ.1 Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και οτι

$$f^{-1}(x) = \ln x + x^3 + x - 2, x > 0.$$

Μονάδες 7

Δ.2 Δίνεται επιπλέον η αντιστρέψιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2x = e^{g^{-1}(x)} - e^{-g^{-1}(x)}, x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε οτι

1. $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

2. η g αντιστρέφεται και $g^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right), x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

Δ.3 Δείξτε οτι η εξίσωση

$$f^{-1}(e^x) + g^{-1}(\sqrt{x}) = f^{-1}\left(1 - x - \frac{x^2}{2}\right)$$

έχει μοναδική λύση στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 7

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείρηση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!