ΘΕΜΑ Α

Α1) Δίνεται μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν:

- η f συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$. (7 μονάδες)

Α2) Πότε μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της; (4 μονάδες)

Α3) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ τότε υποχρεωτικά $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ ».

α) Α ή Ψ (1 μονάδα) β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (3 μονάδες)

Α4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος):

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}}= +\infty$ για κάθε ν ϵ N

β) Η γραφική παράσταση της $f(x) =\sqrt{|x|}$, x ϵ R έχει άξονα συμμετρίας τον y'y

γ) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι πάντα διάστημα

δ) Ισχύει ότι $|x| \geq$ ημx για κάθε x ϵ R

ε) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = +\infty$

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f : R→R με τύπο $f(x) = e^{1-x} + \lambda$, λϵ R της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(1,3).

Β1) Να αποδείξετε ότι λ=2 . (4 μονάδες)

Β2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$, έχει μοναδική ρίζα η οποία βρίσκεται στο διάστημα (0 , 3) . (7 μονάδες)

Β3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι "1-1" και στην συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της . (6 μονάδες)

Β4) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-f^{-1}_{(3)}}{x^2-x}$ β) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-f(1)}{(x-1)^{10}}$ (8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με A_f =A_g = R για τις οποίες ισχύουν
(fog)(x) = $\sqrt{x^2+2x+2}$ − x −1 και g(x) = x +1.

Γ1) Να δείξετε ότι f(x) = $\sqrt{x^2+1}$ − x . (6 μονάδες)

Γ2) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)}$ (7 μονάδες)

Γ3) Έστω η συνάρτηση h για την οποία ισχύει f(x) ≤ h(x) ≤ g(x) για κάθε x ϵ R.

Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0} \eta\mu(h(x)-1)\cdot \sigma\upsilon\nu^2(\frac{1}{h(x)-1})$ (6 μονάδες)

Γ4) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\ln(g(x)) - \frac{1}{g(x)}$ = g(f(0)) όπου x ϵ (−1 , +∞) , έχει μοναδική λύση . (6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{e^x}{1+e^x}$, $x\epsilon R$

Δ1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το διάστημα (0,1) . (6 μονάδες)

Δ2) Να εξετάσετε αν υπάρχει x_0 ϵ (0,1] τέτοιο ώστε $f(x_0) = \ln(x_0+1) - 1$.

(6 μονάδες)

Δ3) Να αποδείξετε ότι $\ln e^{f(x)} - 1 < \ln(1+e^{f(x)}) - \ln(e+1)$ για κάθε xϵR .

(5 μονάδες)

Δ4) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$\frac{f(\alpha)}{x-1} - \frac{\ln f(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\cdot\alpha)}{x} = 0$, όπου 0 < α < 1 , έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x στο διάστημα (0,2) . (8 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ