

Όνοματεπώνυμο:.....

Μάθημα:

Ύλη:

Επιμέλεια διαγωνίσματος :.....

Αξιολόγηση :

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο της $1^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων .

(Μονάδες 7)

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ; Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

(Μονάδες 4)

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό

<< Αν οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα , τότε και η συνάρτηση

$f + g$ είναι ένα προς ένα . >>

Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα Σ αν θεωρείτε τον ισχυρισμό αληθή ή Λ αν τον θεωρείτε λανθασμένο . Να εξηγήσετε την απάντηση σας .

(Μονάδες 4)

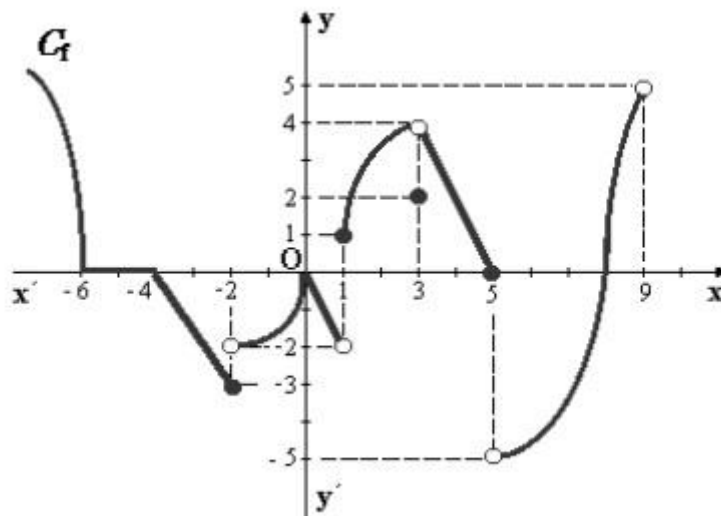
A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή , ή **Λάθος** , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Για δύο συναρτήσεις f, g ισχύει πάντα $f \circ g = g \circ f$.
2. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι "1-1" τότε δεν είναι γνησίως μονότονη .
3. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = -x$.
4. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} είναι γνησίως φθίνουσα . Ισχύει ότι $f(\alpha) > f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.
5. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη μιας συνάρτησης f , τότε ισχύει η ισοδυναμία $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

(Μονάδες 5×2)

ΘΕΜΑ Β

B1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A και σύνολο τιμών $f(A)$.



Να υπολογιστούν το σύνολο A , το $f(A)$, η $f(3)$, το $f(5)$ και το $f(-2)$. Επίσης να γραφεί η μονοτονία της f στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 12)

B2. Έστω η συνάρτηση $f(x+2) = x^2 + 2$ με $x \geq 2$.

- i) Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$ και να δείξετε ότι είναι 1-1.
- ii) Να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης της και η συνάρτηση $(f \circ f)(x)$.
- iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} .

(Μονάδες 5 + 4 + 4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2\ln(-x)$ και $g(x) = \ln x^2$.

Γ1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες. Στην περίπτωση που $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

(Μονάδες 5)

Γ3. Έστω η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = \sqrt{-x}$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της h και να την βρείτε .

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h, h^{-1} .

γ) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f \circ h^{-1}$.

(Μονάδες 5+4+6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει :

- $(f \circ f)(x) = x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(g(x) - e^x - x + 1) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα .

(Μονάδες 5)

Δ2. Να βρείτε την συνάρτηση g .

(Μονάδες 7)

Αν $g(x) = e^x + x - 1$, τότε :

Δ3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \ln(g(x))$.

(Μονάδες 7)

Δ4. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$g^{-1}(e^{x^2+1} + x^2) = 2 .$$

(Μονάδες 6)