

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

02.08.2021

ΘΕΜΑ 1

Α) Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ;

(Μονάδες 5)

Β) Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως. Ποιο σύνολο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$;

(Μονάδες 5)

Γ) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

(Μονάδες 5)

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο

σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- I) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε $f \circ g = g \circ f$.
- II) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της f .
- III) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A και η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο B , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο σύνολο $A \cap B$.
- IV) Το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης f είναι το σύνολο A των τεταγμένων των σημείων της C_f .
- V) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + x - 1$ και $g(x) = \ln x$.

A) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 4)

B) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

(Μονάδες 6)

Γ) α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς την μονοτονία.

β. Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 2 = \ln \frac{x+3}{x^2+1}$.

(Μονάδες 3+6+6)

ΘΕΜΑ 3

A) Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in A$, καθώς και η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$. Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

B) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\sqrt{x-1}}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 9)

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+1}} < \frac{\ln(x^4+2)}{\ln(x^2+2)}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτησεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται στο $(0, +\infty)$ η συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x)$ με $h(x) = x - e^{-x} + 1, x > 0$.

A. Να δείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 3)

B. Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 3)

Γ. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ τότε και η g είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

Δ. Αν $0 < \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{e^\beta - e^\alpha}{\alpha - \beta} < e^{\alpha + \beta}$.

(Μονάδες 5)

Ε) Έστω ότι $g(x) = e^{-x}, x > 0$.

α. Να δείξετε ότι $f(x) = -\ln x - x + 1$.

β. Να βρείτε τη ρίζα και το πρόσημο της f .

(Μονάδες 4+4)

Επιμέλεια : Μαριτίνα Πιστικίδη

Καλή Επιτυχία!