Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Εισηγητής: Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Ανάλυση.

Απρίλιος 2021

Θέμα Α

Α.1 Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε δείξτε οτι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α.2 Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Μονάδες 3

Α.3 Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία απο τις παρακάτω συναρτήσεις την ασύμπτωτή της στο $+\infty$.

Συνάρτηση	Ασύμπτωτη
1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$	Α. y=2
2. $f(x) = -x + 1 + \dfrac{1}{e^x}$	Β. y=x-1
3. $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-2}$	Γ. y=-x+1
	Δ. y=x
	Ε. y=-x

Μονάδες 5

Α.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Όλα τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων αυτής.
2. Σε κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ισχύει οτι $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.
3. Ισχύει οτι $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
4. Αν η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f τότε είτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ είτε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.
5. Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στην C_f, για να διαγράψει τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά την αρνητική φορά.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = x + \frac{1}{x+1}.$$

Β.1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 7

Β.2 Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 6

Β.3 Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x - f(2)}$.

Β.4 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \dfrac{(gof)(x)}{x-2}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης h.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους:

- $f(x) = e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2} + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
- $g(x) = \begin{cases} e^{x-1} & , x \leq 1 \\ x^2 & , x > 1 \end{cases}$

Γ.1 Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της συνάρτησης g.

Μονάδες 4

Γ.2 Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

Μονάδες 7

Στη συνέχεια για $\alpha = -\dfrac{1}{2}$,

Γ.3 Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

Γ.4 Να λύσετε την εξίσωση

$$f(1 - e^x) = x^3 + f(0).$$

Μονάδες 4

Γ.5 Να αποδείξετε οτι

$$(x - 1)f'(x) \geq f(x)$$

για κάθε $x \geq 1$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+e) + \alpha x & , x \leq 0 \\ \\ \dfrac{2x^2+1}{x^2+1} + \alpha x & , x > 0 \end{cases}$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε οτι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ.1 Δείξτε οτι $\alpha = 0$.

Μονάδες 6

Δ.2 Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Δ.3 Αν για την συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει οτι

$$f(x) + \eta\mu(f(x)) \leq g(x) \leq 1 + f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Μονάδες 6

Δ.4 Θεωρούμε την εξίσωση

$$f(x) \cdot f(k-1) = f(\ln k), x \in \mathbb{R}.$$

Για ποιες τιμές της παραμέτρου $k > 0$ η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση ως προς x;

Μονάδες 6

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείρηση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Να έχετε επιτυχία!