

ΘΕΜΑ Α

A1. α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f + g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 \text{ και ισχύει: } (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \text{ (μονάδες 4)}$$

β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

$$\text{και ισχύει: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ (μονάδες 3)}$$

Μονάδες 7

A2. α. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 2

β. Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} και μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού το A .

Πότε η f λέγεται συνάρτηση $1-1$;

Μονάδες 2

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 4, f(1) = 3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ έτσι ώστε $f(x_0) = \pi$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Λ , αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο **α.** ερώτημα.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό** (Σ), αν είναι σωστή, ή με **Λάθος** (Λ), αν είναι λανθασμένη:

α. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και $1-1$ στο διάστημα αυτό.

β. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{συν}x - 1}{x} = 1.$

γ. Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$

δ. $(\text{συν}x)' = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε. Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

B1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B2. Να μελετηθεί η f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , αν υπάρχουν.

Μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2021$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB με μήκος 10 m . Θεωρούμε εσωτερικό σημείο Γ του AB τέτοιο, ώστε το μήκος του τμήματος $A\Gamma$ να είναι $x\text{ m}$.

Γ1. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $A\Gamma\Delta Z$ και $\Gamma B\Theta H$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων, ως συνάρτηση του x , είναι

$$E(x) = 2x^2 - 20x + 100, \quad x \in (0, 10) \text{ (μονάδες 3)}$$

β. Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο. (μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δίνεται συνάρτηση $K(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x-4}$

Γ2. Να ορίσετε τη σύνθεση της συνάρτησης E' με τη συνάρτηση K .

Μονάδες 4

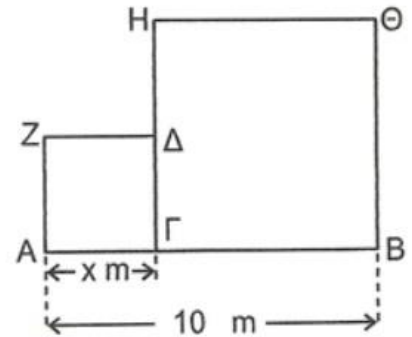
Γ3. Αν $f(x) = (K \circ E')(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x-6}$, $x \in [5, 6) \cup (6, 10)$, να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{K(x)}{(E(x) - 52) \cdot (x - 6)} + \text{συν}f^2(x) \right)$$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{E(x)}{x-1} - \frac{\ell_{\Omega x}}{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6



ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

Δ1. α. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο A διέρχεται από το

$$B\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ τότε να αποδείξετε ότι } f'(1) = -\frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x^2 - 1)}{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - 1}$

Μονάδες 3

Δ2. Αν επιπλέον για την f ισχύει $f^2(x) - 4f(x) = x^2 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7

Δ3. Αν $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 + 3}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α. να αποδείξετε ότι $2f(x) + \ln x \leq 0$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 8

β. έστω σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη μεγαλύτερη του 1.

Αν η τετμημένη του M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων O με ταχύτητα 3cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAM τη χρονική στιγμή που η τετμημένη είναι ίση με $\sqrt{13}\text{cm}$.

Μονάδες 5