Διαγώνισμα προσομοίωσης στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Εισηγητής : Αντώνης Λουτράρης

Φεβρουάριος 2021

Θέμα Α

Α.1 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε οτι είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbf{A}$. Τι εκφράζει γεωμετρικά ο αριθμός $f'(x_0)$;

Μονάδες 2

Α.2 Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε δείξτε οτι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 6

Α.3 Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 3

Α.4 Σε ένα γραπτό διαγώνισμα παραγώγων ο καθηγητής Μαθηματικών ζήτησε να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x, 0 < \alpha \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και οτι ισχύει $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha, x \in \mathbb{R}$.
Σε ένα γραπτό ένας μαθητής έκανε την ακόλουθη απόδειξη:
Έχουμε οτι $f(x) = \alpha^x \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln \alpha^x \Leftrightarrow \ln f(x) = x \ln \alpha$. Παραγωγίζουμε και παίρνουμε

$$(\ln f(x))' = (x \ln \alpha)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \alpha \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \ln \alpha \Leftrightarrow f'(x) = \alpha^x \ln \alpha.$$

Συμφωνείτε με τον μαθητή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Α.5 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η παράγωγος μίας συνάρτησης μηδενίζεται είναι θέσεις ακροτάτων.

2. Αν για μία συνάρτηση ισχύουν οι προυποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε η γραφική της παράσταση δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y = 2021$.

3. Αν για δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει οτι $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x), x \in \mathbb{R}$ είναι αναγκαστικά σταθερή στο $\mathbb{R}$.

4. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$.

5. Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ για την οποία $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, δεν εχει κρίσιμα σημεία στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε:

- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) + 2e^{x+1} - 1}{x + 1} = 2$
- $2x^2 - 8 - 2\eta\mu(x - 2) \leq (x - 2)f(x) \leq (6x - 12)e^{x-2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

καθώς και η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{\alpha^x}{1 - e^x}$ όπου $\alpha > 0$.

Β.1 Να αποδείξετε οτι $f(-1) = -1$ και $f(2) = 6$.

Μονάδες 8

Β.2 Δείξτε οτι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(-1, f(-1))$ είναι η ευθεία $y = -1$.

Μονάδες 6

Β.3 Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$ δείξτε οτι $\alpha = e$.

Μονάδες 5

Β.4 Δείξτε οτι η g αντιστρέφεται και βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται η γνήσια φθίνουσα συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $(0, e) \cup (e, +\infty)$
- η f είναι συνεχής στο $x_0 = e$
- $(x^2 - ex)\, f'(x) + xf(x) = 1$ για κάθε $(0, e) \cup (e, +\infty)$.

Γ.1 Δείξτε οτι $(x - e)f(x) = \ln x - 1, x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ.2 Δείξτε οτι

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} & ,0 < x \neq e \\ \dfrac{1}{e} & ,x = e \end{cases}$$

Μονάδες 5

Γ.3 Βρείτε την παράγωγο της f και έπειτα το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

Γ.4 Αν F μία παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(2x) - F(x)}{x}.$$

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 27}.$$

Δ.1 Μελετήστε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και δείξτε οτι το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$.

Μονάδες 7

Δ.2 Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot f(x)\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Μονάδες 5

Δ.3

i. Δείξτε οτι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την συνάρτηση $g(x)=(x-3)f(x)$ στο διάστημα $[0,3]$.

Μονάδες 2

ii. Δείξτε οτι υπάρχει $x_0\in(0,3)$ με την ιδιότητα:

$$4f'(x_0)<\frac{1}{3-x_0}.$$

Μονάδες 5

Δ.4 Να λύσετε την εξίσωση

$$2\left(f\left(\frac{x^2}{3}\right)-f(x)\right)=1, x\in\mathbb{R}.$$

Μονάδες 6

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείρηση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Να έχετε επιτυχία!