Ονοματεπώνυμο:………………………………………………..

Μάθημα: ……………………………………………………………

Ύλη: …………………………………………………………

Επιμέλεια διαγωνίσματος :…………………………………………

Αξιολόγηση : ……………………………………………………………..

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν :

- η $f(x)$ είναι συνεχής στο Δ ,
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ .

(Μονάδες 8)

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle .

(Μονάδες 3)

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

<< Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)=0$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$. >>

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής .

(Μονάδες 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα (α) .

(Μονάδες 3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα , τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

β. Ισχύει ότι $\ln x < x$, $x > 0$.

γ. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$.

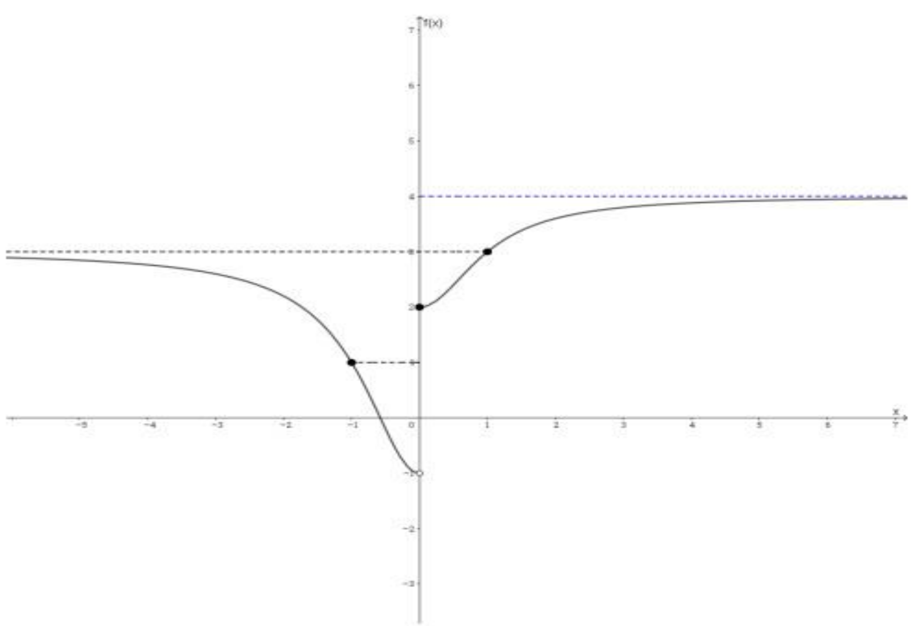
δ. Αν για μία συνάρτηση ισχύει το Θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\beta]$, τότε η γραφική της παράσταση δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y=2021$.

ε. Για την συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$ και για οποιοδήποτε $[x_1,x_2]$, ο αριθμός που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. είναι το κέντρο του διαστήματος $[x_1,x_2]$.

(Μονάδες 10*)*

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



(Μονάδες 7*)*

Β1 . Να βρείτε το πεδίο ορισμού , το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της f .

(Μονάδες 5)

Β2 . Υπολογίστε εφόσον υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\left(f(x)-3\right)\cdot \sigma\upsilon\nu x\right]$ γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{f(x)}}{f(x)-4}$ δ) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\left(f(x)+1\right)\cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{|x|}\right)\right]$

(Μονάδες 8)

Β3 . Εξετάστε αν ισχύει το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής στο διάστημα $[0,1]$. Ικανοποιεί η f το **συμπέρασμα** του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-1,1]$;

(Μονάδες 6)

Β4 . Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $4f(\xi)=f(0)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύουν :

- $(x-1)f(1)-\ln x\geq 0$
- $\lim\limits_{h\to +\infty}\left[h\cdot\left(f\left(x+\dfrac{1}{h}\right)-f(x)\right)\right]=1-\dfrac{1}{x}$

Γ1. Δείξτε ότι $f(x)=x-\ln x$ **,** $x>0$.

(Μονάδες 6)

Γ2. Βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)$ και δείξτε ότι η εξίσωση $f\left(f(x)-\dfrac{1}{3}\right)=1$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

(Μονάδες 7)

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ2** , να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από

το σημείο $\mathrm{M}\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$.

(Μονάδες 6)

Γ4. Για κάθε $x>0$ να αποδείξετε ότι $f(x)-f\left(x-f'(x)\right)\le\left(f'(x)\right)^2$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f(0)=1$
- $\left|e^{x^2}f(x)-e^{y^2}f(y)\right|\le(x-y)^2$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Δ1. Δείξτε ότι $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

Δ2. Να δείξετε ότι $1-x^2\le f(x)\le 1$, $x\in[0,1]$ και ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)+x^2}{x-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{f(x)-1}{x-\dfrac{1}{3}}=1$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$.

(Μονάδες 6)

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \ x\ne 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$.

Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\eta\mu^2 x\cdot g\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$. *(Μονάδες 7)*

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ!!!!