Ονοματεπώνυμο: ....

Μάθημα: ....

Υλη: ....

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ....

Αξιολόγηση : ....

ΘΕΜΑ Α

Α1) Να αποδείξετε ότι , αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και f(α)≠ f(β) τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $f(x_0) = \eta$.
(**7 μονάδες**)

Α2) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ (**4 μονάδες)**

Α3) Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :
" Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)= 0$ τότε ισχύει αναγκαστικά ότι $f(\alpha)\cdot f(\beta) <0$ "

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Α (Αληθής) ή Ψ (Ψευδής) .(**1 μονάδα)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας . (**3 μονάδες)**

Α4) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (Σωστή) ή Λ (Λάθος) :

α) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) >0$ κοντά στο x_0 .

β) Αν η συνάρτηση f+g είναι συνεχής στο x_0 τότε και οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς στο x_0 .
γ) Κάθε συνάρτηση που είναι “1-1” στο πεδίο ορισμού της είναι και γνησίως μονότονη.
δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 τότε κατ' ανάγκη και η σύνθεση τους gof είναι συνεχής στο x_0 .
ε) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα .
(**10 μονάδες**)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει :
$1-x^2 \leq f(x) \leq 1+x^2$ για κάθε $x \in R$ και συνάρτηση g συνέχης στο R , με $g(x) \neq x$ για κάθε $x < 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(–1,2) .
Β1) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 . (**5 μονάδες**)
Β2) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :
α) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x}$ β) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$ (**7 μονάδες**)
Β3) Να δείξετε ότι $g(x) > x$ για κάθε $x < 0$. (**5 μονάδες**)
Β4) Αν η f συνεχής στο R , να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x)= 2x^2$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,2)$.
(**8 μονάδες**)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f :

$$f(x)=\begin{cases} a-\dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & \alpha\nu\ x<0 \\ \dfrac{x}{-1+\sqrt{x+1}}, & \alpha\nu\ 0<x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}, & \alpha\nu\ x>3 \end{cases}$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι f(0) =2 και ότι το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει.

Γ1) Να βρείτε την παράμετρο α. (**3 μονάδες**)

Αν α=5 :

Γ2) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στα σημεία $x_0=0$, $x_0=3$ και να δείξετε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο [0,3] (**8 μονάδες**)

Γ3) Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{f(x)\cdot\ln x}$ γ) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)-1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ (**8 μονάδες**)

Γ4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0,3]$ τέτοιο ώστε :

$$f(x_0) = \frac{2f\left(\frac{\pi}{2}\right)+2f(e)+f(2\sqrt{2})}{5}$$ **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει ότι , $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$, για κάθε $x \in R$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cdot f(x) - \eta\mu x}{x^2+1} = 3$.

Δ1) α) Να δείξετε ότι f(0)=0 (**2 μονάδες**)

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (**3 μονάδες**)

Δ2) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $x \in R$ (**6 μονάδες**)

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R:

Δ3) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή και να λύσετε την ανίσωση: $e^{2 \cdot f(x^3+2x)} - (\sqrt{10} - 3) \cdot e^{-f(-2x-x^3)} > 0$

(7 μονάδες)

Δ4) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f(x) + \sqrt{1+f(x)^2} = 2+\sqrt{5}$.(**7 μονάδες**)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ : ASKISIOPOLIS, ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ