Ονοματεπώνυμο:………………………………………………..

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ύλη: ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ- ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Επιμέλεια διαγωνίσματος :…………………………………………

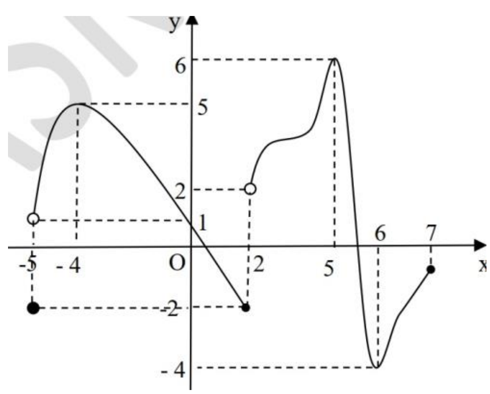
Αξιολόγηση : ……………………………………………………………..

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ,τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 8)

Α2. Έστω η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της .

β) Να γράψετε τα ακρότατα και τις θέσεις τους .

γ) Να αναφέρετε ένα διάστημα όπου ισχύει το θεώρημα Bolzano δικαιολογώντας την απάντηση .

δ) Ισχύει το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών στο διάστημα $[-5,2]$;

(Μονάδες 4)

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

<< Για οποιοδήποτε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ με

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = 0$. >>

Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως ψευδή ή αληθή και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας .

(Μονάδες 3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεων σας **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση :

α) Μία συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία ακριβώς λύση ως προς x .

β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε θα ισχύει $f(\beta) > 0$.

γ) Ισχύει $\left(2^{2^x}\right)' = 2^x \left(2^x (\ln 2)^2\right)$

δ) Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής , τότε ο αριθμός $\dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών .

ε) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν τα εξής :

- η συνάρτηση f δεν παίρνει αρνητικές τιμές
- $f^2(x)-\dfrac{x^8}{64}=\dfrac{x^4\left(1+x^2\right)}{16}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{x^2}{4}$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Β2. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της $\mathrm{A}\left(1, f(1)\right)$ και $\mathrm{B}\left(-1, f(-1)\right)$ τέμνονται στον άξονα $y'y$ σε σημείο Μ και το τρίγωνο AMB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .

(Μονάδες 8)

Β3. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x)=f(x-1)+2$ και την αντίστοιχη τιμή του x .

(Μονάδες 6)

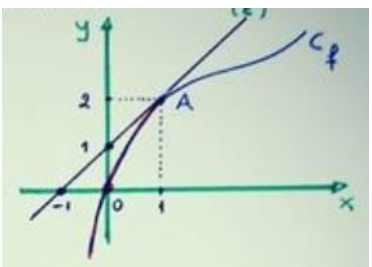
Β4. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln f(x)\right]$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln f(x)}{\eta\mu x}}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα εξής :

- $f(x)=\begin{cases} g(x) & , \ x\le 1 \\ h(x) & , \ x>1 \end{cases}$
- Η ευθεία είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1,2)$
- Η συνάρτηση $g(x)$ είναι δευτέρου βαθμού πολυωνυμική .



Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας και να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$

(Μονάδες 6)

Γ2. Αν $g(0)=0$,

α) Να αποδείξετε ότι $g(x)=-x^2+3x$.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $t(x)=\begin{cases} \alpha g(x) & , \ x<0 \\ \sqrt{x}\left(1-\sigma\upsilon\nu x+3\sqrt{x}\right) & , \ x\ge 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)\le w(x)\le x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Να υπολογίστε το $w'(1)$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει :

- $f^2(x)-\sigma\upsilon\nu^2 x=2f(x)\eta\mu x+e^{2x}-1$, $x\in\mathbb{R}$
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(0,1)$
- Η g είναι γνησίως μονότονη .

Δ1. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\eta\mu x+e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[1,3]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi)=\sqrt[3]{f(1)f(2)f(3)}$.

(Μονάδες 5)

Δ3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $h(x)=f(x)+\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$, $x\ge 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=2021$ έχει ακριβώς μία θετική ρίζα στο διάστημα $\Delta=[0,+\infty)$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Αν δίνεται το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-h(x_1)\cdot x^5}{\big(g(2)-g(3)\big)\cdot x^3+x+1}=-\infty$ όπου x_1 είναι η ρίζα του ερωτήματος Δ3. , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα .

(Μονάδες 5)

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{g(\alpha)-g(\eta\mu\alpha)}{x_0-1}+\dfrac{(h\circ g)(\beta)-(h\circ g)(\alpha)}{x_0-2}=0$,

με $0<\alpha<\beta$.

(Μονάδες 5*)*