



Ημερομηνία: \_\_\_\_\_

Διάρκεια: 3 ώρες

**Όνοματεπώνυμο:** \_\_\_\_\_**Βαθμολογία**

--	--	--	--	--

 %

## Θέμα Α

**A.1** Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

**6 μονάδες**

**A.2** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

**9 μονάδες**

**A.3** Σημειώστε με (**Σ**) κάθε σωστή πρόταση και με (**Λ**) κάθε λανθασμένη πρόταση.

(α) Αν  $\alpha > 1$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

(β) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

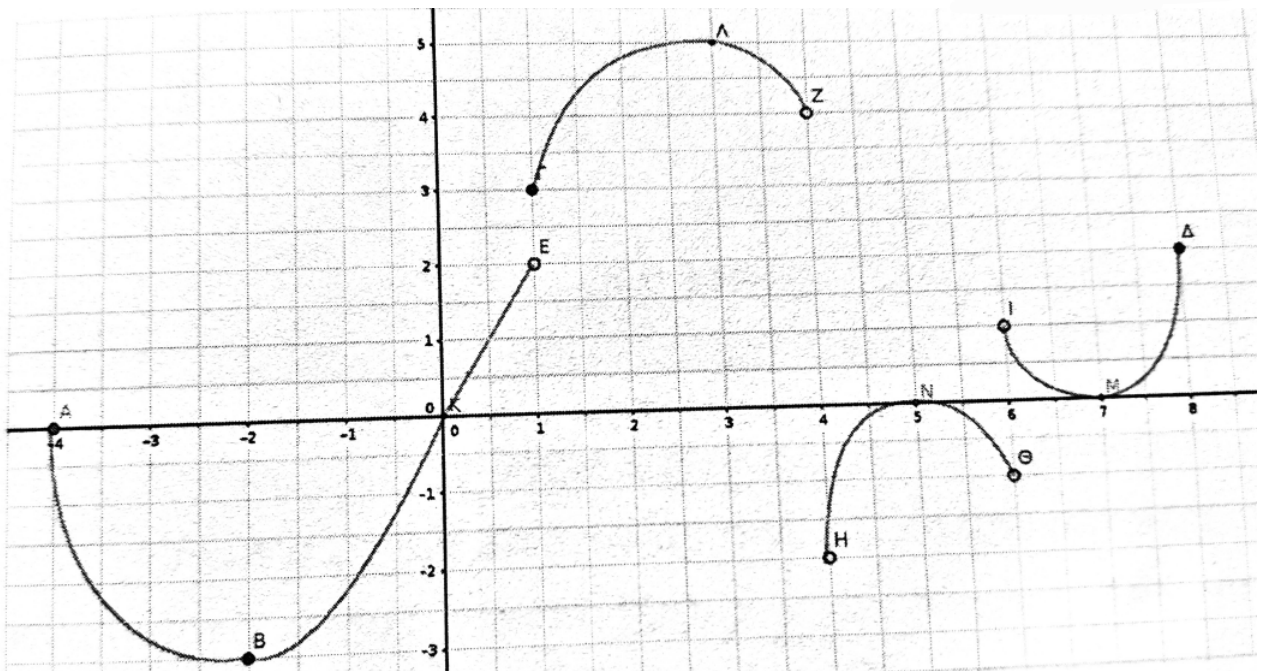
(γ) Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(\alpha)f(\beta) > 0$  τότε δεν υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ .

(δ) Αν η  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε το  $f(\Delta)$  είναι διάστημα ή μονοσύνολο.

(ε) Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\rho_1, \rho_2$  διαδοχικές ρίζες της  $f$  στο  $\Delta$  με  $\rho_1 < \rho_2$  τότε η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\rho_1, \rho_2)$ .

[5 × 2 = 10 μονάδες]

## Θέμα Β



Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

**B.1** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

**5 μονάδες**

**B.2** Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 4} f(x), \lim_{x \rightarrow 6} f(x), \lim_{x \rightarrow 7} f(x), \lim_{x \rightarrow 8} f(x)$$

**7 μονάδες**

**B.3** Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow 3} f(f(x)), \lim_{x \rightarrow 5} f[f(f(x))], \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{f(x+7)}$$

**8 μονάδες**

**B.4** Να βρείτε τα σημεία όπου η  $f$  δεν είναι συνεχής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**3 μονάδες**

**B.5** Στα παραπάνω σημεία που η  $f$  δεν είναι συνεχής θα μπορούσε να είναι παραγωγίσιμη ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**2 μονάδες**

## Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2^x - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ.1** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**6 μονάδες**

**Γ.2** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}$$

**7 μονάδες**

**Γ.3** Να λύσετε την ανίσωση  $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} + x^2 < 2 + 2^{-x^2}$ .

**5 μονάδες**

**Γ.4** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $2^x - 6^x = (x + \alpha)3^x$  έχει μοναδική ρίζα για κάθε τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$

**7 μονάδες**

## Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta\mu x}{x^2} = 1 \text{ και } (f(x))^2 = 1 + 2xf(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Δ.1** Να αποδείξετε ότι  $f(0) = -1$ .

**6 μονάδες**

**Δ.2** Να αποδείξετε ότι  $f(x) < x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**7 μονάδες**

**Δ.3** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{f(x)}{x} + \frac{e^{x+2}}{x+1} = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(-2, 0)$ .

**6 μονάδες**

**Δ.4** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**7 μονάδες**

Καλή επιτυχία