

Επαναληπτικό διαγώνισμα στην Άλγεβρα

Εισηγητής: Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Συστήματα - Συναρτήσεις.

Νοέμβριος 2020

Θέμα Α

A.1 Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Γράψτε τους τύπους για την ορίζουσα D του συστήματος καθώς και για τις ορίζουσες D_x, D_y . Ποια η λύση του συστήματος στη περίπτωση όπου $D \neq 0$;

Μονάδες 8

A.2 Έστω $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Πότε η f :

1. είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbf{A} ;
2. είναι περιττή στο \mathbf{A} ;
3. παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x_0 \in \mathbf{A}$;

Μονάδες 7

A.3 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει δύο λύσεις τότε αναγκαστικά έχει άπειρες λύσεις.
2. Αν μία συνάρτηση $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια τότε $f(-x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in [-a, a]$.

-
3. Μία περιττή συνάρτηση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
4. Αν για κάποια γνήσια μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, το $f(2017) < f(2018)$ τότε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο \mathbb{R} .
5. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \lambda x - 2y = \lambda \\ x + (\lambda - 3)y = 2, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

B.1 Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) να αποδείξετε ότι $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 2$.

Μονάδες 8

B.2 Να λύσετε το σύστημα όταν:

- i. $\lambda = 1$
- ii. $\lambda = 2$

Μονάδες 8

B.3 Αν (x, y) είναι μοναδική λύση του συστήματος τέτοια ώστε $x + y = 0$ να βρείτε την τιμή του λ και έπειτα την λύση του συστήματος.

Μονάδες 9

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$.

Γ.1 Βρείτε το πεδίο ορισμού της f και δείξτε ότι η f γράφεται στη μορφή

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}.$$

Μονάδες 6

Γ.2 Δείξτε ότι η f είναι άρτια.

Μονάδες 6

Γ.3 Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία στο $(0, +\infty)$ και έπειτα λύστε την εξίσωση

$$2 + \frac{1}{(x^2 + 2|x| + 1)^2} = \frac{9}{4}$$

Μονάδες 7

Γ.4 Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $h(x) = f(x) + x^2, x > 0$.

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ καθώς και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \alpha x^3 + \beta x$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f^2(0) + f^2(7) - 10f(0) - 6f(7) \leq -34$
- $\frac{3}{g(1)} - \frac{24}{g(2)} = -1$
- $\frac{3g(2) + 4g(1)}{g(1)g(2)} = \frac{4}{3}$

Δ.1 Δείξτε ότι $f(0) = 5, f(7) = 3, g(1) = 3, g(2) = 12$.

Μονάδες 8

Δ.2 Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και δείξτε ότι η g είναι περιττή.

Μονάδες 6

Δ.3 Μελετήστε την g ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι η συνάρτηση $g - f$ είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

Δ.4 Λύστε την ανίσωση:

$$f(f(x^2 + 6x) - 3) < 5.$$

Μονάδες 5

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείριση χρόνου.
- Διάρκεια τρεις ώρες.

Καλή διασκέδαση!