



Όνοματεπώνυμο:.....

Μάθημα: ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Ύλη : ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ , ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ , ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος:

Αξιολόγηση:

ΘΕΜΑ 1) Α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει η σχέση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

(6 μονάδες)

Β. Να δώσετε τους ορισμούς

- α. Γνησίως αύξουσας συνάρτησης
- β. Άρτιας συνάρτησης
- γ. Μέγιστου συνάρτησης

(3x1 μονάδες)

Γ. Να σημειώσετε με (Σ) τις σωστές και (Λ) τις λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:

α. Σε γραμμικό 2×2 σύστημα μοναδική λύση είναι η $(x, y) = (0, 0)$, τότε το σύστημα είναι ομογενές.

β. Αν για τις ορίζουσες D, D_x, D_y ενός γραμμικού και 2×2 συστήματος ισχύει

$(D-3)^2 + (D_x-2)^2 + (D_y+3)^2 \leq 0$ τότε η μοναδική λύση του συστήματος είναι

$(x, y) = \left(\frac{2}{3}, -1\right)$.

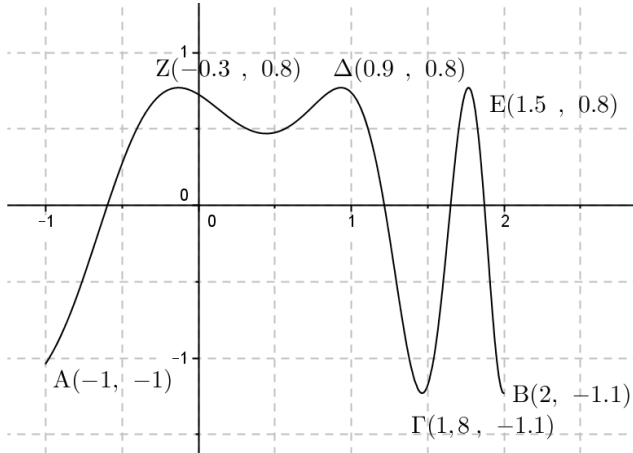
γ. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε δεν μπορεί να είναι άρτια.

δ. Αν η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το (α, β) , τότε δεν έχει ακρότατα.

ε. Ισχύει ότι $\eta\mu\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega)$.

(5x2 μονάδες)

Δ. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[-1, 2]$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Να προσδιορίσετε τις σωστές από τις παρακάτω προτάσεις:



- i. Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε 3 διαστήματα του πεδίου ορισμού της
- ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $(-1.1, 0.8)$
- iii. Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε τρία σημεία του πεδίου ορισμού της.
- iv. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις.
- v. Είναι άρτια συνάρτηση .
- vi. Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι η -1.1 .

(6x1 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\varphi x}$ με $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$.

β) Να δείξετε ότι $-1 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

γ) Αν $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\varphi x} - \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\varphi x} + \frac{4}{5} - \eta\mu x = 0$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

δ) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \frac{\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(9\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu(\pi - x) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) \cdot \epsilon\varphi(3\pi - x)}$.

(Μονάδες 5+6+7+7)

ΘΕΜΑ 3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

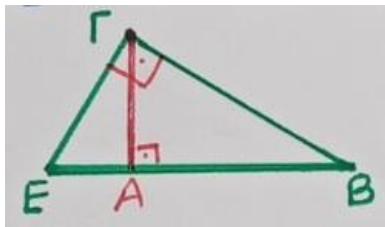
α) i) Να δείξετε ότι $f(x) = (x+2)^2 + 1$.

ii) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $h(x) = f(x-3) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $w(x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

β) Έστω ότι $t(x) = \begin{cases} f(x) & , x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x & , x > -2 \end{cases}$ και στο τρίγωνο ΕΒΓ του σχήματος ισχύουν

$\eta\mu B = t(-2) + t(-1)$, $B\Gamma = 2$ cm, $\Gamma A \perp EB$ και $\epsilon\Gamma B = 90^\circ$.



Να βρεθούν :

- i) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ
- ii) Η πλευρά ΕΓ.
- iii) Η περίμετρος του τριγώνου ΕΒΓ
- iv) Η εφαπτομένη της γωνίας Ε.

(Μονάδες (2+5+4)+(4+4++4+2))

ΘΕΜΑ 4) Α. Δίνεται μία γωνία ω για την οποία ισχύει $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$ καθώς και μία γνησίως

μονότονη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(\eta\mu\omega) > g(\sigma\upsilon\nu\omega)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και να δείξετε ότι

$g(|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|) \geq g(\sqrt{2})$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Θεωρούμε επίσης μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = (g(\eta\mu\omega) - g(\sigma\upsilon\nu\omega))x^5 + \frac{\varepsilon\varphi\omega}{\sigma\varphi\omega}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία .

Β. α) Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με ορίζουσα $D = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$. Αφού εξηγήσετε

για ποιο λόγο έχει μοναδική λύση , να την προσδιορίσετε θεωρώντας την ανίσωση

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 \leq 2D + 4D_x - 5 .$$

β) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \left(x - \frac{D_x}{D}\right)^2 + \left(y - \frac{D_y}{D}\right)^2 = 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$$
 και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά

το αποτέλεσμα .

(Μονάδες (8+6)+(5+6))

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ!!!