



ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Πραγματικοί αριθμοί – Διάταξη πραγματικών αριθμών

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Τι ονομάζεται ταυτότητα;

**Μονάδες 4**

**A2.** Να αποδείξετε την ταυτότητα του Euler:

$$(a + \beta + \gamma)^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$$

**Μονάδες 5**

**A3.** Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών (του μικρότερου από του μεγαλύτερου) ισούται με το άθροισμά τους.

**Μονάδες 6**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν  $x > 2$  και  $y > 3$  τότε  $xy > 6$ .

β) Αν  $x < y$  τότε  $x^2 < y^2$ .

γ) Ισχύει ότι  $a^2 - 6a + 9 > 0$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $a$ .

δ) Ισχύει ότι  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha, \beta$ .

ε) Αν  $x > 3$  και  $y > 4$  τότε  $(3-x)(4-y) < 0$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύουν:  $2 \leq \alpha \leq 4$  και  $-4 \leq \beta \leq -3$ .

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

A.  $2\alpha + 3\beta$

B.  $\alpha - 2\beta$

Γ.  $\frac{\alpha}{\beta}$

Δ.  $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

Ε.  $\frac{\alpha+1}{\beta+8}$

**Μονάδες 25**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις  $K = 2\alpha^2 + \beta^2$  και  $L = 2\alpha\beta$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Α) Να δείξετε ότι  $K \geq L$ , για κάθε τιμή των  $\alpha, \beta$ .

Μονάδες 12

Β) Για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta$  ισχύει η ισότητα  $K=L$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$ .

Δ1. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = (\alpha^{-2}\beta^{-1})^{-6} \cdot [(\alpha^2\beta)^{-1} \cdot (\alpha\beta^2)^{-2}]^2 \text{ όταν } \alpha = \frac{3}{5} \text{ και } \beta = 0,6.$$

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι  $2(\alpha + 3)^3 + 36(\alpha^2 + 3) - 2(\alpha + 3)^3 = 0$ .

Μονάδες 6

Δ3. Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{2}$ , να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$B = \frac{2\alpha^2 - 4\alpha\beta - 5\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

(Υπόδειξη: Λύστε ως προς  $\alpha$  ή  $\beta$  και αντικαταστήστε στην παράσταση Β)

Μονάδες 7

Δ4. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\Gamma = \frac{\beta^2 - 4}{\beta^3 + 8} : \frac{\beta - 2}{\beta^2 - 2\beta + 4}$$

Μονάδες 6