Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………………

Μάθημα: ……………………………………………………………………

Υλη: ……………………………………………………………………

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ……………………………………………………………………

Αξιολόγηση : ……………………………………………………………………

ΘΕΜΑ Α

Α1) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)= \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$. (**7μονάδες**)

Α2) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. (**4 μονάδες**)

Α3) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: << Αν για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > 0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ ≫

α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση ; (**1 μονάδα**)

β) Αιτιολογήστε την απάντηση σας. (**3 μονάδες**)

Α4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) :

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty$

β) Αν $f(x) > g(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη τότε και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας

δ) Αν για την συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0.

ε) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x\cdot \eta\mu x} = +\infty$

(**10 μονάδες**)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1+|x|}{|x|}$ και $g(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2}$.

Β1) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f , g είναι ίσες . (**5 μονάδες**)

Β2) Να υπολογίσετε , αν υπάρχουν , τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0} f(f(x))$ (**7 μονάδες**)

Β3) Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται . (**3 μονάδες**)

Β4) Αν $h(f(x)) = \frac{1}{x} - \ln x$, $x > 1$

α) Να δείξετε ότι $h(x) = \ln(x-1) + x - 1$, $x > 1$

β) Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της h με την αντίστροφη της .

(**10 μονάδες**)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha \ , & x < 0 \\ 2 \ , & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$

Γ1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0 , 2]$. (**4 μονάδες**)

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της τότε :

Γ2) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α . (**4 μονάδες**)

Αν $\alpha = 3$:

Γ3) Να υπολογίσετε , αν υπάρχουν , τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|f(x)+6|-6x}{|x^2-3|-2}$ γ) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \cdot \eta\mu\frac{1}{x}$

(**9 μονάδες**)

Γ4) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$ (**8 μονάδες**)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) = $\frac{(\mu-1)\cdot x^3 + x^2 + \chi - 6}{\mu\cdot x^2 - 5x + 6}$ και g(x) = $\sqrt{1+x^2}$ + λ·x , με λ,μ ϵ R .

Δ1) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού μ , αν γνωρίζουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το R . (**3 μονάδες**)

Δ2) α) Να βρεθούν οι τιμές του μ αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

β) Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \in R$ να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών μ , α . (**6 μονάδες**)

Για μ =1 :

Δ3) α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι f(x) = $\frac{6}{x-3}$ + 1 .

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της. (**8 μονάδες**)

Δ4) α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} g(x)$, για τις διάφορες τιμές του λ ϵ R

β) Για λ = –1 , να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g(x)}$

(**8 μονάδες**)

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ : Askisiopolis , Παπαδάκης