

Ονοματεπώνυμο:

Μάθημα: Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Επιμέλεια διαγωνίσματος : Στέλλα Γαλεράκη

Αξιολόγηση :

ΘΕΜΑ Α

A1.

- i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
- ii. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- iii. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A . Πότε το $f(x_0)$ λέγεται ελάχιστο της f στο A ;

A2. Να ελέγξετε αν είναι Σωστή ή Λανθασμένη καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη Σωστή ή Λανθασμένη δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν A και B τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού A_1 της συνάρτησης $g \circ f$ είναι το $A_1 = \{x / x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$.
2. Αν μία συνάρτηση f είναι $1 - 1$ τότε κατ' ανάγκη είναι γνησίως μονότονη.
3. Αν μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε θα είναι κατ' ανάγκη και $1 - 1$.
4. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} βρίσκονται πάντα πάνω στην ευθεία $\psi = x$.
5. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $1 - 1$, αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε η $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
7. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x' της γραφικής παράστασης της f .
9. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και xOy' .
10. Αν για δυο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ τότε ισχύει πάντοτε $g \circ f = f \circ g$.

A3.

Έστω ο παρακάτω ισχυρισμός : «Αν μια συνάρτηση είναι $1-1$, τότε είναι συνάρτηση γνησίως μονότονη».

- i. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με τη λέξη **ΣΩΣΤΟ** ή τη λέξη **ΛΑΘΟΣ**.
- ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα A3 (i). (Μπορείτε να δώσετε αντιπαράδειγμα).

A4.

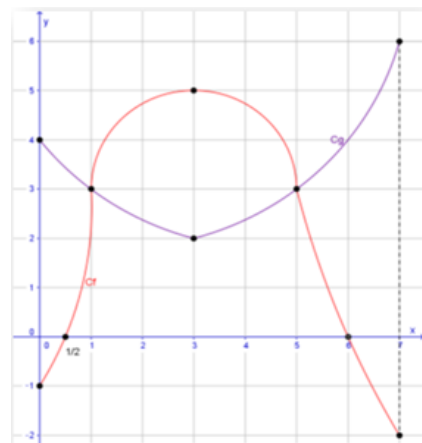
Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση.

Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν, :

- i) κάθε ευθεία παράλληλη στον γ'γ άξονα τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε σημείο.
- ii) κάθε ευθεία παράλληλη στον χ'χ άξονα τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε σημείο.
- iii) κάθε ευθεία κάθετη στον χ'χ άξονα τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε σημείο.
- iv) η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική στη διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημόριου.

A5. Οι συναρτήσεις f, g του παρακάτω σχήματος έχουν πεδίο ορισμού το $A=[0,7]$. Από την γραφική παράσταση να απαντήσετε στα ακόλουθα :

- i) Να γράψετε τα σύνολα τιμών $f(A), g(A)$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ και την ανίσωση $f(x)<0$.
- iii) Να βρείτε τις τιμές : $(f+g)(3), (g \circ f)(6), (f-g)(7), (f \circ f)(3)$.



(Μονάδες : (2+2+2)+(10x1)+(1+2)+2+(1+1+2)=25)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

- B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.
- B2.** Να ορισθεί η συνάρτηση $f \circ g$.
- B3.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- B4.** Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της $f \circ f \circ g$.

(Μονάδες : 5+7+6+6=25)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ και $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - x}$. Να εξετάσετε αν $f = g$. Αν $f \neq g$, να βρείτε το

ευρύτερο υποσύνολο του \mathcal{R} στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$. **(3 μονάδες)**

Γ2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 16 - x^2$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. **(4 μονάδες)**

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5 - \sqrt{2-x}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. **(3 μονάδες)**
- β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} . **(4 μονάδες)**

Γ4. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f ορισμένη στο \mathcal{R} , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(5, 9)$.

- α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f . **(3 μονάδες)**
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$. **(4 μονάδες)**
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$. **(4 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ και $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

- $(f \circ g)(x) = x + \ln x, x > 0$
- $g(x) = \ln x + 1, x > 0$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{x-1} + x - 1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το $f^{-1}(e + 1)$.

Δ3. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της $f^{-1}(x)$ με την ευθεία $y = x$.

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση : $e^{\eta\mu x} - e^{\sigma\upsilon\nu x} = -e(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες:6+6+6+7=25)

Καλή επιτυχία!