Ονοματεπώνυμο:……………………………………………..

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ύλη: ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος :…………………………………………

Αξιολόγηση : ………………………………………………………………..

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύουν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο R.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί η κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

β) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty$.

γ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: R \to R$ και $g: R \to R$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = 0$.

δ) Αν η συνάρτηση $f: A \to R$ είναι αντιστρέψιμη, τότε ισχύει πάντα ότι: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$.

ε) Η γραφική παράσταση $y=\sqrt{|x|}$ αποτελείται από δύο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{x}$ και ο άλλος είναι η συμμετρική της ως προς ως προς τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+1$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

Μονάδες 8

Β2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x-\frac{1}{x}=2018$ έχει ακριβώς μία λύση .

Μονάδες 6

Β3. Αν $0<\alpha<1<\beta$, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(\beta)}{2-x}+\frac{f(\alpha)}{x^3-1}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:(0,2)\to R$, για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot f(x)=-\frac{3}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot f(x)=-\frac{1}{2}$

Γ1. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x)=f(x)+\ln x-1,\ x\in(0,2)$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=e^{1-f(x)}$ ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,2)$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\alpha \in (1,\sqrt{2})$ τέτοιο, ώστε: $f(\alpha)=\dfrac{f(1)+2f(\sqrt{2})}{3}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:R \to R$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in R$

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot f(x)=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

Μονάδες 7

Αν επιπλέον ισχύει $f(0)=1$ και $\dfrac{f(x)-x}{e^x}+\dfrac{e^x}{x-f(x)}=0$, για κάθε $x \in R$, τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+x,\ x \in R$.

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Μονάδες 6

Δ4. Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta=[-1,1]$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από το σημείο $A(1,0)$ περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από το Α λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

Μονάδες 5

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Μπαλτάς Τάσος
2. Study4exams
3. Μπαρακλιανός
4. Μπάμπης Στεργίου