Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Εισηγητής: Αντώνης Λουτράρης
Ενότητα: Ανάλυση.

Νοέμβριος 2020

Θέμα Α

Α.1 Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

Α.2 Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

$\ll$ Για οποιοδήποτε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : \mathbb{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ το $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = 0.$ $\gg$

α΄. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β΄. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

Μονάδες 3

Α.3 Έστω $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ συνεχής και γνήσια φθίνουσα για την οποία $f(1) \cdot f(3) < 0$. Για ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ;

i. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f στο διάστημα $(1,3)$.

ii. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ και $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$.

iii. $f([1,3]) = [f(3), f(1)]$.

iv. Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(3,4)$.

v. Η εξίσωση $f(x) = 2019$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[0,4]$.

Μονάδες 4

Α.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο.

2. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ και η f ορίζεται στο x_0 τότε $f(x_0) > 0$.

3. Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ τότε αναγκαστικά το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

4. Για κάθε συνεχή και γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής διασφαλίζει την ύπαρξη ακριβώς μίας, μέγιστης και ελάχιστης τιμής στο $[0,1]$.

5. Ισχύει οτι $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

Μονάδες 10

Θέμα B

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 1$.
- $g : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x-2}$.

B.1 Δείξτε οτι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης gof είναι το σύνολο

$$\mathbf{A} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

και οτι $(gof)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Μονάδες 6

B.2 Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} ((gof)(x) - x)$.

Μονάδες 6

B.3 Εξετάστε αν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 2$ της συνάρτησης $h : \mathbf{A} - \{2\} \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \frac{(gof)(x)}{x-2}.$$

Μονάδες 6

B.4 Θεωρούμε την συνάρτηση $\phi(x) = \begin{cases} (gof)(x) & , x \in \mathbf{A} \\ 1 - x^2 & , x \in (-1, 1) \end{cases}$

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{t(x) - t(1)}{x - 1}$$

όπου $t(x) = \phi(x) \cdot \eta\mu(\pi x), x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Ας είναι μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει

$$f(x) - \frac{1}{f(x)} = 2x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Γ.1 Βρείτε τους δυνατούς τύπους της f.

Μονάδες 7

Γ.2 Δίνεται επιπλέον οτι $f(0) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \sqrt{x^2+1} + x^6 \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x^6} \right) \right]$.
Δείξτε οτι $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ.3 Θεωρούμε κάποιον αριθμό ϵ με $0 < \epsilon < 1$. Δείξτε οτι η εξίσωση

$$\frac{f(\epsilon)}{x} + \frac{f^2(\epsilon)}{x-1} = -\frac{\eta\mu(\pi\epsilon)}{x-2}$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες, ως προς x, στο διάστημα $(0, 2)$.

Μονάδες 6

Γ.4 Αν ϵ ο αριθμός του προηγούμενου ερωτήματος, υπολογίστε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f\left(\frac{1}{1+\eta\mu^2 x}\right)}{e^x + f(x)} + \frac{\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x}{(1+\epsilon)^x} \right).$$

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g : [-1, +\infty)$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

- Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$.
- $\left| \eta\mu \left(\lim_{x \to 0} |f(x)| \right) \right| = \left| \lim_{x \to 0} |f(x)| \right|$
- $g(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\eta\mu x}{x} & , x \in [-1, 0) \\ f(0) & , x = 0 \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} & , x \in (0, +\infty) \end{cases}$

Δ.1 Δείξτε οτι η g είναι συνεχής στο $[-1, 3\pi]$.

Μονάδες 7

Δ.2 Έστω ρ η θετική ρίζα της g στο διάστημα $[-1, 3\pi]$. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to \rho} g\left(-\frac{1}{g(x)} \right).$$

Μονάδες 6

Δ.3 Έστω $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Αν επιπλέον γνωρίζετε οτι η g είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0, 1]$ τότε δείξτε οτι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, 2\alpha)$ με την ιδιότητα

$$2g(\xi) = g(\alpha) + g(2\alpha).$$

Μονάδες 6

Δ.4 Υπολογίστε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{f(3x) + f(x) - f(2x)}.$$

Μονάδες 6

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείρηση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή διασκέδαση!