

Όνοματεπώνυμο:

Μάθημα: Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Επιμέλεια διαγωνίσματος : Στέλλα Γαλεράκη, Μαριτίνα Πιστικίδη, Ηλίας Σπυρόπουλος

Αξιολόγηση :

ΘΕΜΑ Α

A1.

- i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
- ii. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- iii. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A . Πότε το $f(x_0)$ λέγεται ελάχιστο της f στο A ;

A2.

Να χαρακτηρίσετε με τη λέξη **ΣΩΣΤΟ** ή τη λέξη **ΛΑΘΟΣ** τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- ii) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, \alpha), (\alpha, +\infty)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$.
- iii) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathcal{R}$, ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in A$.
- iv) Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

A3.

Έστω ο παρακάτω ισχυρισμός : «Αν μια συνάρτηση είναι 1-1, τότε είναι συνάρτηση γνησίως μονότονη».

- i. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με τη λέξη **ΣΩΣΤΟ** ή τη λέξη **ΛΑΘΟΣ**.
- ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα A3 (i). (Μπορείτε να δώσετε αντιπαράδειγμα).

A4.

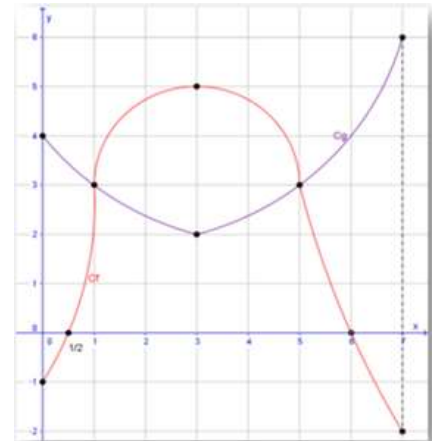
Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση.

Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν, :

- i) κάθε ευθεία παράλληλη στον $y'y$ άξονα τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε σημείο.
- ii) κάθε ευθεία παράλληλη στον $x'x$ άξονα τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε σημείο.
- iii) κάθε ευθεία κάθετη στον $x'x$ άξονα τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε σημείο.
- iv) η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική στη διχοτόμο του $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημόριου.

A5. Οι συναρτήσεις f, g του παρακάτω σχήματος έχουν πεδίο ορισμού το $A=[0,7]$. Από την γραφική παράσταση να απαντήσετε στα ακόλουθα :

- i) Να γράψετε τα σύνολα τιμών $f(A)$, $g(A)$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ και την ανίσωση $f(x)<0$.
- iii) Να βρείτε τις τιμές : $(f+g)(3)$, $(g \circ f)(6)$, $(f-g)(7)$, $(f \circ f)(3)$.



(Μονάδες : $(3+3+3)+(1+1+1+1)+(1+3)+3+(1+2+2)=25$)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.

B2. Να ορισθεί η συνάρτηση $f \circ g$.

B3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

B4. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της $f \circ f \circ g$.

(Μονάδες : $5+7+6+6=25$)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση τέμνει τον x στο σημείο $A(-2,0)$.

- i. Να βρείτε το πρόσημο της f .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 3x - 2) = 0$.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{2x}) = f(3e^x - 2)$.
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x^2 - 3) \leq 0$.

Γ2. α) Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και η $g : A \rightarrow \mathcal{R}$ γνησίως φθίνουσα τότε η συνάρτηση $f - g$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) 1) Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + 2^x - 3$ και $g(x) = 8 - x^5 - 7^x$.

2) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g και τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

(Μονάδες:(3+3+3+3)+[5+(4+4)]=25)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ και $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

- $(f \circ g)(x) = x + \ln x, x > 0$
- $g(x) = \ln x + 1, x > 0$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{x-1} + x - 1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το $f^{-1}(e + 1)$.

Δ3. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της $f^{-1}(x)$ με την ευθεία $y = x$.

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση : $e^{\eta\mu x} - e^{\sigma\nu x} = e(\sigma\nu x - \eta\mu x)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες:6+6+6+7=25)

Καλή επιτυχία!