# Διαγώνισμα Εφ'όλης ύλης Μαθηματικά Γ Λυκείου Θετικού προσανατολισμού

## Σάββατο 9 Μαΐου 2020

## Θέμα A

**A.1.** Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντιστοίχως.

**α)** Πότε ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$

**(Μονάδες 2)**

**β)** Στην περίπτωση που ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$, ποιός είναι ο τύπος της και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

**(Μονάδες 3)**

**A.2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

**(Μονάδες 4)**

**A.3.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ τέτοια, ώστε:

- η f να είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

**(Μονάδες 5)**

**A.4.** Σε καθεμία από τις ερωτήσεις που ακολουθούν να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Αν $f'(x) > 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και $f(0) = 1$τότε:

   **α)** $f(1) > 2$
   **β)** $f(1) < 2$
   **γ)** $f(1) = 1$
   **δ)** $f(1) < 1$

**ε)** $f(1) = 2$

**(Μονάδες 3)**

2. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \beta,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και$f(x) < g(x)$ κοντά στο $x_0$, τότε θα είναι:

   **α)** $\alpha < \beta$

   **β)** $\alpha \leq \beta$

   **γ)** $\alpha \geq \beta$

   **δ)** $\alpha = \beta$

   **ε)** $\beta < \alpha$

**(Μονάδες 3)**

**A.5.** Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

*«Όλα τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων αυτής»*

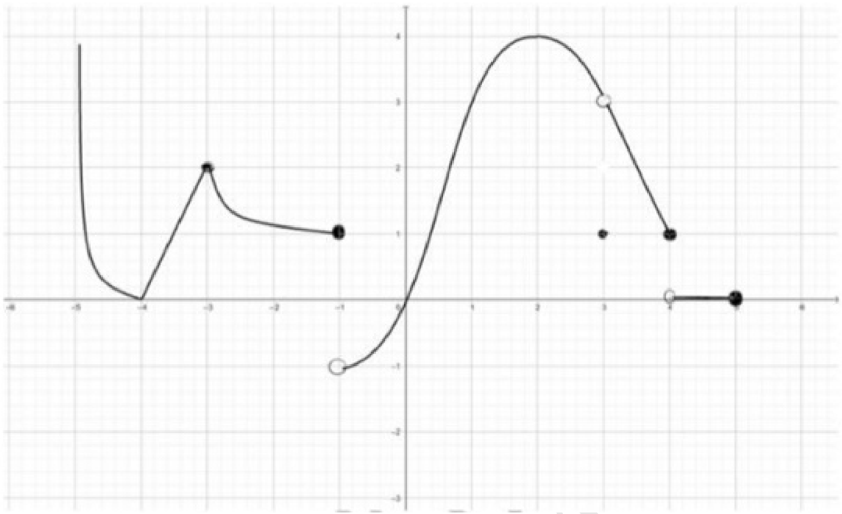
**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με το γράμμα **Α** αν είναι αληθής και με το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

**(Μονάδες 2+3)**

# Θέμα Β

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



**(Β.1)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

**(Μονάδες 4)**

**(Β.2)** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

**(α.)** $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$

**(β.)** $\lim\limits_{x\to 3} f(f(x))$

**(γ.)** $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{1}{f(x)}$

**(δ.)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)}$

**(ε.)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{f(x)}$

**(στ.)** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{f(x)-f(-\pi)}{(x+\pi)}$

**(Μονάδες 6)**

**(Β.3)** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

**(Μονάδες 5)**

**(Β.4)** να αιτιολογήσετε αν υπάρχει $x_0 \in (-3,-1)$ , ώστε $f'(x_0) = -\frac{1}{2}$

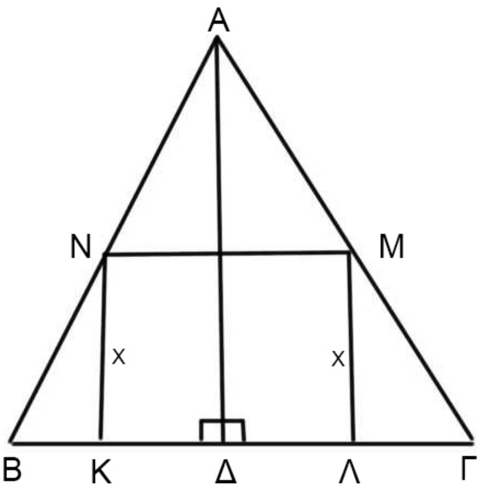
**(Μονάδες 3)**

**(Β.5)** Να βρείτε τα διαστήματα όπου $f'(x) > 0$

**(Μονάδες 3)**

## Θέμα Γ

Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμένο σε τρίγωνο ΑΒΓ βάσης ΒΓ= 12 cm και ύψους ΑΔ =20 cm.




**(α)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΚΛΜΝ είναι
$$E = E(x) = \frac{-3x^2 + 60x}{5}, \quad 0 < x < 20$$

**(7 μονάδες)**

**(β)** Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του ορθογωνίου ΚΛΜΝ γίνεται μέγιστο; Ποιο είναι το εμβαδόν αυτό;

**(6 μονάδες)**

**(γ)** Θεωρούμε επιπλέον ένα κινητό Μ που ξεκινά από το σημείο Α(10,60) και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = E(x), \quad x \in (0, 10)$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεμημένης του, αν υποτεθεί ότι $x'(t) < 0 \quad \forall \quad t \geq 0$.

**(7 μονάδες)**

**(δ)** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{ln(10 - |x|)}{E(x) - 60}$

**(5 μονάδες)**

# Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{ημχ}}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

**(Δ.1)** Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

**(5 μονάδες)**

**(Δ.2)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $(0, \pi)$

**(5 μονάδες)**

**(Δ.3)** Να αποδείξετε ότι ημx $< \frac{2x}{\pi}$, για κάθε $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2x}{\pi \text{ημx} - 2x}$

**(8 μονάδες)**

**(Δ.4)** να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 = x^2 f(x) + \text{συνx}$

**(7 μονάδες)**

**Καλή Επιτυχία!**