Ονοματεπώνυμο: ....

Μάθημα: ....

Υλη: ....

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ....

Αξιολόγηση : ....

ΘΕΜΑ Α

Α1) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

(7 μονάδες)

Α2) Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της ;

(4 μονάδες)

Α3) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

<< Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x))$, τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} g(x)$ >>

α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση ; **(1 μονάδα)**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. **(3 μονάδες)**

Α4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σ** (Σωστό) ή **Λ** (Λάθος).

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και δεν είναι αντιστρέψιμη , τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο η f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

γ) Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$.

δ) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \to x_0}|f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

ε) Αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Ένας αγρότης έχει ένα αγροτεμάχιο σχήματος ορθογωνίου το οποίο θέλει να το περιφράξει με συρματόπλεγμα. Αν το εμβαδόν του αγροτεμαχίου είναι 400 m^2 και x η μια διάσταση του ορθογωνίου τότε :

Β1) Να εκφράσετε το μήκος Π (x) του συρματοπλέγματος που χρειάζεται ο αγρότης για να περιφράξει το αγροτεμάχιο συναρτήσει του x. **(6 μονάδες)**

Αν Π (x) = $2x + \frac{800}{x}$, x > 0 :

Β2) Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου ώστε ο αγρότης να χρειάζεται την μικρότερη περίφραξη . **(7 μονάδες)**

Β3) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς τιμές του x ώστε το μήκος του συρματοπλέγματος να είναι 2020 μέτρα **(7 μονάδες)**

Β4) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu(\Pi(x))}{x}$
(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : R→R η οποία για κάθε x ϵ R ικανοποιεί τις σχέσεις :

• f (x) ≠ 0 • $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}$ • f (0) = $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 1}}{x}$

Γ1) Να δείξετε ότι f (0) = 3 και ότι η συνάρτηση g (x) = $f^2(x)$ – 2x·f (x) , x ϵ R είναι σταθερή . **(6 μονάδες)**

Γ2) Να αποδείξετε ότι f (x) = x + $\sqrt{9+x^2}$, x ϵ R .
(5 μονάδες)

Γ3) α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της .

β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .
(7 μονάδες)

Γ4) Να λύσετε την ανίσωση :

$x + \sqrt{9+x^2} + \sqrt{9 + (x + \sqrt{9+x^2})^2} < 9$. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ και $g(x) = \frac{lnx}{x-2}$

Δ1) α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα **(3 μονάδες)**

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. **(4 μονάδες)**

Δ2) Να αποδείξετε ότι $x \cdot \ln x > x - 2$, για κάθε $x > 0$

(4 μονάδες)

Δ3) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι $\alpha^{\beta-2} > \beta^{\alpha-2}$ με $2 < \alpha < \beta$

(6 μονάδες)

Δ4) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της h όπου $h(x) = (x^2 - 1) \cdot f(x)$, $x \neq 1$

που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και το γινόμενο των κλίσεων αυτών είναι e^{-1}. **(8 μονάδες)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ : askisiopolis

καινοτόμος μάθηση Φροντιστηριακός Οργανισμός