Διαγώνισμα προσομοίωσης στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Εισηγητής : Αντώνης Λουτράρης

Μάιος 2020

Θέμα Α

Α.1 Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε οτι είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbf{A}$. Τι εκφράζει γεωμετρικά ο αριθμός $f'(x_0)$;

Μονάδες 4

Α.2 Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

Α.3 Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 4

Α.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τα σύνολα A και B αντίστοιχα τότε για να ορίζετε η σύνθεση της f με την g πρέπει αναγκαστικά το σύνολο $\{x \in A | f(x) \in B\}$ να μην είναι κενό.

2. Αν μία συνάρτηση f είναι $1-1$ σε κάποιο σύνολο τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική της παράσταση ακριβώς σε ένα σημείο.

3. Αν $f(x) > 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ τότε κατ'ανάγκη $\lim_{x\to 0} f(x) \geq 2$.

4. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x\to x_0} \dfrac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$.

5. Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ για την οποία $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, δεν εχει κρίσιμα σημεία στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε:

- $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x) + 2e^{x+1} - 1}{x+1} = 2$
- $2x^2 - 8 - 2\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq (6x-12)e^{x-2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

καθώς και η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{\alpha^x}{1-e^x}$ όπου $\alpha > 0$.

Β.1 Να αποδείξετε οτι $f(-1) = -1$ και $f(2) = 6$.

Μονάδες 8

Β.2 Δείξτε οτι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(-1, f(-1))$ είναι η ευθεία $y = -1$.

Μονάδες 6

Β.3 Αν $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -1$ δείξτε οτι $\alpha = e$.

Μονάδες 5

Β.4 Δείξτε οτι η g αντιστρέφεται και βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Θέμα Γ [1]

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 27}.$$

Γ.1 Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 f(x) \eta\mu \left(\frac{1}{x} \right) \right)$.

Μονάδες 4

Γ.2 Μελετήστε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ.3

i. Δείξτε οτι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την συνάρτηση $g(x) = (x - 3)f(x)$ στο διάστημα $[0, 3]$.

Μονάδες 3

ii. Δείξτε οτι υπάρχει $x_0 \in (0, 3)$ με την ιδιότητα:

$$4f'(x_0) < \frac{1}{3 - x_0}.$$

Μονάδες 6

Γ.4 Να λύσετε την εξίσωση

$$2 \left(f \left(\frac{x^2}{3} \right) - f(x) \right) = 1, x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 6

[1] Γ.Μιχαηλίδης

Θέμα Δ [2]

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ με $f(2) = \ln 2$, $f\left(\frac{1}{e}\right) < e$ και για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ισχύουν τα εξής:

- η f είναι παραγωγίσιμη
- $|xf(x) - 1| + |x(x-1)|f'(x) = 0$
- $f(x) \neq \frac{1}{x}$

Δ.1 Να αποδείξετε οτι $f(1) = 1$.

Μονάδες 6

Δ.2 Να δείξετε οτι οι εφαπτομένες των συναρτήσεων $F(x) = (x-1)f(x)$ και $G(x) = \ln x$ είναι παράλληλες σε όλα τα σημεία με ίδια τετμημένη $x_0 \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Μονάδες 4

Δ.3 Βρείτε το τύπο της f και να εξετάσετε τη παραγωγισιμότητα της στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

Δ.4 Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

Δείξτε οτι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και οτι $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \geq 1$.

Μονάδες 5

Δ.5 Να δείξετε οτι οι γραφικές παραστάσεις $f(x)$ και $\Phi(x)$ με $\Phi(x) = \frac{x-1}{e^x} + 1$, τέμνονται σε ένα και μόνο σημείο στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Μονάδες 5

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείρηση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Να έχετε επιτυχία!

[2] Study4exams