

# Διαγώνισμα Εφ'όλης ύλης Μαθηματικών Β Λυκείου Θετικού προσανατολισμού

Σάββατο 9 Μαΐου 2020

## Θέμα Α

**A.1.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  και  $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$ . Να δείξετε ότι ισχύει  $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$

**A.2.** Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις.

(α) Αν  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$  τότε ισχύει  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

(β) Αν  $\vec{a} // \vec{\beta}$  τότε ισχύει  $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = -1$

(γ) Αν  $|\vec{a}| = \lambda \cdot |\vec{\beta}|$  τότε  $\vec{a} // \vec{\beta}$

(δ) Η ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη στο  $\vec{\delta} = (-B, A)$

(ε) Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

(15+10 = 25 μονάδες)

## Θέμα Β

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφή B(-2,3), ύψος AK :  $y = x + 1$   
και διάμεσο AM :  $y = -3x + 5$

**(B.1)** Να δείξετε ότι A(1,2)

**(B.2)** Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς BΓ

**(B.3)** Να δείξετε ότι Γ(6,-5)

**(B.4)** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

**(B.5)** Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Δ έτσι ώστε το ABΔΓ να είναι παραλληλόγραμμο.

(3+7+7+4+4 = 25 μονάδες)

## Θέμα Γ

Στην κινηματική υλικού σημείου στη Φυσική της Α Λυκείου η εξίσωση που δίνει τη θέση ενός υλικού σημείου με σταθερή επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση:

$$y = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \text{ για } t \geq 0. \quad (1)$$

όπου  $y$  η θέση του υλικού σημείου σε  $m$  και όπου  $t$  ο χρόνος σε  $sec$ . Θεωρείστε ότι τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  το σώμα είναι ακίνητο ( $u_0 = 0$ ), βρίσκεται στη θέση  $y_0 = 0$  και κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου  $a = 4m/s^2$

**(Γ.1)** Να βρείτε την εστία της παραβολής καθώς και την διευθετούσα ευθεία και να σχεδιάσετε την παραπάνω παραβολή σε βαθμολογημένους άξονες.

Θεωρείστε κύκλο με κέντρο την εστία  $E$  της παραβολής και ακτίνα  $\rho = 3P$ , όπου  $P$  η παράμετρος της παραβολής.

**(Γ.2)** Να βρείτε το σημείο τομής  $M(t,y)$  του κύκλου και της παραβολής.

Η εφαπτομένη που διέρχεται από το σημείο  $M(t,y)$  που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο  $\Delta$ .

**(Γ.3)** Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμου τμήματος  $(M\Delta)$

Δίνεται για τις πράξεις  $\sqrt{10} \approx 3$

(7+9+9 = 25 μονάδες)

## Θέμα Δ

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (x, y)$ ,  $\vec{\beta} = (1, 2)$ ,  $\vec{\gamma} = (2\lambda, y)$  και  $\vec{\delta} = (x, 4\lambda)$ ,  
 $x, y \in \mathbb{R}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}^*$

**(Δ.1)** Αν ισχύει  $|\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} - 10\lambda(1)$  να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M(x,y)$  είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του  $\rho$ .

Αν ο παραπάνω κύκλος έχει εξίσωση  $C : x^2 + y^2 - 2(1+\lambda)x - 4(1+\lambda)y + 10\lambda + 5 = 0$

**(Δ.2)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

(Δ.4) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Α.

(Δ.4) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) :  $x + 2y - 5 = 0$  είναι κοινή εφαπτομένη στο σημείο Α όλων των κύκλων που ορίζονται από την (1)

(10+3+6+6 = 25 μονάδες)

**Καλή Επιτυχία!**