Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………

Μάθημα: ……………………………………………………………

Υλη: ……………………………………………………………

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ……………………………………………………………

Αξιολόγηση : ……………………………………………………………

ΘΕΜΑ Α

Α1) *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση* $f(x) = x^{\nu}$ *, με* $\nu \epsilon N - \{0,1\}$ *είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει*
$f'(x)= \nu \cdot x^{\nu-1}$ *για κάθε* $x \epsilon R$. **(7 μονάδες)**

Α2) *Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α ,β] του πεδίου ορισμού της ;*

(4 μονάδες)

Α3) *Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής [−1, 1] με*
f(−1)=3 και f(1)=4 τότε μπορούμε να ισχυριστούμε με βεβαιότητα ότι :

α) Η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η ελάχιστη το 4

β) Η εξίσωση f(x)=π έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (−1, 1)

γ) Η f διατηρεί πρόσημο στο [−1, 1]

(3 μονάδες)

Α4) *Η παράγωγος της συνάρτησης* $f(x)=3^{x^2}$ *ισούται με :*

α) $2x \cdot 3^{x^2}$ *β)* $x^2 \cdot 3^{x^2-1}$ *γ)* $2x \cdot 3^{x^2} \cdot \ln 3$ **(3 μονάδες)**

Α5) *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως*
Σ *(Σωστό) ή* **Λ** *(Λάθος) :*

α) Κάθε συνάρτηση διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα όπου οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

β) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης

γ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 *ισχύει :*
$(f \cdot g)'(x_0)=f'(x_0) \cdot g'(x_0)$

δ) Αν 0<α<1 τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x}, x>1 \\ x^2+a, x\leq 1 \end{cases}$

Β1) *Να υπολογίσετε το α єR ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.*

(3 μονάδες)

Αν α =–1 :

Β2) *α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο* $x_0=1$. **(3 μονάδες)**

β) Να βρείτε την παράγωγο της f και να μελετήσετε το πρόσημο της. **(5 μονάδες)**

Β3) *Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια*

α) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *β)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{f(x)}$ **(6 μονάδες)**

Β4) *Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη είναι κάθετη προς την ευθεία y = –4x +2020 και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.*

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to R$ *για την οποία ισχύει ότι :* $f^2(x) - x = 0$ *για κάθε x >0 και*

$f(1) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot \eta\mu \dfrac{1}{x}$.

Γ1) *Να αποδείξετε ότι f(1)=1 .* **(4 μονάδες)**

Γ2) *Να αποδείξετε ότι* $f(x)=\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ **(6 μονάδες)**

Γ3) *Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατα μήκος της καμπύλης* $y=\sqrt{x}$*. Να βρείτε σε ποιό σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) του Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του y(t), αν υποτεθεί ότι* $y'(t)>0$*, για κάθε t≥0 .*

(7 μονάδες)

Γ4) *Δίνεται επιπλέον μια συνεχής συνάρτηση* $g: [0, +\infty) \to R$ *για την οποία ισχύει* $0< g(x)<1$ *για κάθε x≥0. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=g(x) έχει μοναδική ρίζα* x_0 *η οποία ανήκει στο (0,1).*

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει ότι :

$f(x)\neq 0$ *και* $f^3(x) + e^{x\cdot f(x)} + 3f(x) = 5$ *για κάθε* $x\epsilon R$.

Δ1) *Να δείξετε ότι* $f(0)=1$ *και να υπολογίσετε το όριο :* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(e)\cdot x^2 + x + 2}{x+1}$ **(6 μονάδες)**

Δ2) *Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της* C_f *στο σημείο* $A(0, f(0))$.
(5 μονάδες)

Δ3) *Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει* $x_0 \epsilon R$ *τέτοιο ώστε* $f'(x_0)=0$. **(6 μονάδες)**

Αν $f(R)=(0, +\infty)$ *:*

Δ4) *α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.* **(3 μονάδες)**

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{lnx + e^{-x}}{f(x)}$ **(5 μονάδες)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ