ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Α' ΦΑΣΗΣ 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Μονάδες 8

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; **Μονάδες 3**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση y= f(x) έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η g o f ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Αν η f είναι συνεχής στο x_o και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_o, τότε η σύνθεσή τους gof είναι πάντα συνεχής στο x_o .

δ)) Αν f(x) >0 κοντά στο x_o, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) > 0$.

ε) Αν f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μία μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -e^{3x} - x^3 + 1$

Β1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Μονάδες 6

Β2. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{f(x)}$.

Μονάδες 4

Β3.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-e^{3x}-x^3-2015} = 1$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 3

Β4. Αν για την συνάρτηση $g: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$e^{3g(x)} + g^3(x) = x^3e^6 + (lnx + 2)^3$, για κάθε x<0, να αποδείξετε ότι ο τύπος της g είναι $g(x) = lnx + 2$ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $(x-2)f(x) = kx^2 + \lambda x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάποια κ,λ πραγματικούς αριθμούς.
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(f^2(2)-25)x^3 + f(2)x^2 - 3x + 9}{x^2+2x-6} = 5$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+3h)-5}{h} = 9$

Γ1) Να αποδείξετε ότι f(2)=5 και f΄(2)=3. **Μονάδες 6**

Γ2) Να αποδείξετε ότι κ=3 και λ=−7. **Μονάδες 5**

Γ3) Να βρείτε τον τύπο της f. **Μονάδες 2**

Γ4) Αν $f(x) = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g με

$g(x) = ln(x+1) + 2x - 1, x \in (-1, +\infty)$ **Μονάδες 6**

Γ5) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = x + 1 - e^{1-2x}$, με $x \in (-1, +\infty)$ τέμνει την γραφική παράσταση της g σε ένα μόνο σημείο του άξονα x'x.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει:

f(ημx)=$συν^2x$+x-1, για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

Δ1) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0 , f(0)). **Μονάδες 5**

Δ2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \sqrt{2}/2)$ τέτοιο ώστε f΄(ξ)=ξ.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)f'(x) - \eta\mu 3x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

Μονάδες 3

Δ4) Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2 + 2x$, έτσι ώστε η τετμημένη του x να αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/s. Η προβολή του σημείου Μ πάνω στον x'x είναι το σημείο Α.

Α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΜ, όταν το σημείο Μ έχει τετμημένη ίση με ½.

Β) Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του x;

Μονάδες 5 +6=11