

# Διαγώνισμα στην Άλγεβρα

Διδάσκων: Αντώνης Λουτράρης  
Θεματική Ενότητα: Συναρτήσεις - τριγωνομετρία

Ιανουάριος 2020

## Θέμα Α

**A.1** Δείξτε ότι για οποιαδήποτε γωνία  $\omega$  ισχύει ότι

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1.$$

**Μονάδες 6**

**A.2** Έστω  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Πότε η  $f$ :

1. είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbf{A}$ ;
2. είναι περιττή στο  $\mathbf{A}$ ;
3. παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο  $x_0 \in \mathbf{A}$ ;

**Μονάδες 6**

**A.3** Σχεδιάστε πρόχειρα στο διάστημα  $[0, 4\pi]$  τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = -\eta\mu x$  και  $f(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$ .

**Μονάδες 3**

**A.4** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Αν  $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$  τότε οι αριθμοί  $\eta\mu\omega$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega$  είναι ομόσημοι.

2. Η περίοδος της συνάρτησης  $f(x) = \epsilon\phi x$  είναι  $T = \frac{\pi}{2}$ .
3. Μία περιττή συνάρτηση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
4. Αν για κάποια γνήσια μονότονη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , το  $f(2017) < f(2018)$  τότε η  $f$  είναι γνήσια φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .
5. Για οποιαδήποτε γωνία  $\omega$  με  $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$  ισχύει  $\epsilon\phi^2\omega + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = -1$ .

Μονάδες 10

**Θέμα Β**

Δίνονται οι παραστάσεις:

- $\mathbf{A} = \frac{\epsilon\phi(7\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi + x) \cdot \eta\mu(3\pi - x) \cdot \sigma\phi(9\pi - x)}{\eta\mu(2\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi - x) \cdot \epsilon\phi(6\pi - x) \cdot \sigma\phi(8\pi + x)}$
- $\mathbf{B} = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

B.1 Δείξτε ότι  $\mathbf{A} = 1$ .

Μονάδες 9

B.2 Δείξτε ότι  $\mathbf{B} = \frac{2}{\eta\mu x}$ .

Μονάδες 7

B.3 Αν  $\mathbf{B} = \frac{10}{4}$  και  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$\mathbf{\Gamma} = 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x - \sigma\phi x.$$

Μονάδες 9

**Θέμα Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$ .

**Γ.1** Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  και δείξτε ότι η  $f$  γράφεται στη μορφή

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}.$$

**Μονάδες 5**

**Γ.2** Δείξτε ότι η  $f$  είναι άρτια.

**Μονάδες 6**

**Γ.3** Μελετήστε την  $f$  ως προς τη μονοτονία στο  $(0, +\infty)$  και έπειτα λύστε την εξίσωση

$$2 + \frac{1}{(x^2 + 2|x| + 1)^2} = \frac{9}{4}$$

**Μονάδες 8**

**Γ.4** Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $h(x) = f(x) + x^2, x > 0$ .

Θεωρείστε γνωστό ότι για κάθε  $x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

**Μονάδες 6****Θέμα Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu(\pi - 3x) + \eta\mu 3\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ .

**Δ.1** Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και δείξτε ότι  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 3x$ .

**Μονάδες 7**

**Δ.2** Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$  και την περίοδό της.

**Μονάδες 6**

**Δ.3** Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα μίας περιόδου και στο ίδιο διάστημα σχεδιάστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h(x) = -2\sigma\upsilon\nu 3x$ .

**Μονάδες 6**

**Δ.4** Λύστε την εξίσωση  $x^2 = 2(\sin 3x - 1)$ .

**Μονάδες 6**

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείριση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

**Καλή Επιτυχία !**